

Anleitung

zu

Rechnungen der Geodäsie.

Von

Friedrich Theodor Poselger Dr.

Berlin,

bei Ferdinand Dümmler.

1831.

Dem

Königlich Preufs. Major, und Chef des Generalstabes der Artillerie; Mitgliede der oberen Militärischen-Studien-Behörden,

Herrn von Radowitz,

dem Gelehrten; dem Freunde,

der Verfasser.

Die Absicht dieses kleinen Werkes ist, dem Geographen, welchem ein völlig berichtigtes Dreiecknetz vorliegt, bequeme Methoden darzulegen zu Lösung darauf zu gründender geodätischer Aufgaben, abgeleitet von ihren wissenschaftlichen Principien und leicht übersichtlich in ihrem natürlichen Zusammenhange.

Die Instruction worauf es sich bezieht, ist, zur Zeit als Manuscript, in drei lithographirten Heften, erlassen von Sr. Excellenz dem General, Herrn von Müffling, damaligem Chef des Generalstabes der Königl. Preufs. Armee, unter dem Titel: Instruction für die topographischen Arbeiten des Königl. Preufs. Generalstabes.

Berlin am 15. Januar 1821.

Die hier in Druck erscheinenden wenigen Bogen sind zunächst für Officiere des Königl. Preufs. Heeres, Freunde des Verfassers, geschrieben und werden dem gröfseren Publicum mit dem Wunsche und der Hoffnung übergeben, Geographen und Geodäten überhaupt einen nützlichen Dienst zu leisten.

Berlin den 17. September 1831.

Poselger Dr.

Prof. Lehrer an der Königl. Preufs. Allgemeinen Kriegsschule.

Zu verbessern wird gebeten.

Seite 1 Zeile 6 $\frac{b+c-a}{2}$ statt: $\frac{b+o-a}{2}$ in der zweiten Formel rechts

— — — 7 $\frac{b+a-c}{2}$ st. $\frac{b+c-a}{2}$, in der ersten Formel links

— — — 18 *cos* $\frac{1}{2}$a st. *sin* $\frac{1}{2}$a

— 2 — 19 20 β' st. β

— 5 — 23 β' st. β

— 7 — 8 ergiebt st. er giebt

— 9 — 36 als der st. das der

— 15 — 27 gedacht st. gesucht

— 32 — 37 MO. *sin* C′A′ st. MO: *sin* C′A′.

— 36 — 28 l. 7. st. 1. 8.

— 37 — 23 l. 7. st. 1. 8.

— 41 — 20 nun st. nur

— 43 — 4 fallen st. fällt

— 47 — 22 *cos* γ^2 st. *cos* γ

Cap. I.

Die Erde als Kugel.

1. Alle Betrachtungen der Erde als Kugel gründen sich in der sphärischen Trigonometrie. Zur Lösung der hieher gehörigen Aufgaben sind vorzüglich bequem die Gaufsischen Formeln *), welche sich auf folgende Weise herleiten lassen:

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+c-b}{2}\cdot\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin b\,.\,\sin c}};\qquad \cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\,.\,\sin c}}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin\frac{b+c-a}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin a\,.\,\sin c}};\qquad \cos\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin\frac{b+c+a}{2}\cdot\sin\frac{c+a-b}{2}}{\sin a\,.\,\sin c}}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin\frac{c+b-a}{2}\cdot\sin\frac{c+a-b}{2}}{\sin a\,.\,\sin b}};\qquad \cos\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin\frac{c+a+b}{2}\cdot\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin a\,.\,\sin b}}.$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(B-C) = \sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C - \sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}B =$$

$$\frac{\sin\frac{a+(b-c)}{2} - \sin\frac{a-(b-c)}{2}}{\sin a}\sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\,.\,\sin c}}.$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sin\frac{a+(b-c)}{2} - \sin\frac{a-(b-c)}{2}}{\sin a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}a}.$$

Ganz auf ähnliche Weise:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}a};$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}a};$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}a}.$$

*) theoria motus corp. coelest. p. 51. §. 54.

2. **Hieraus, wenn wir setzen:**

$$A=\lambda; \quad C=\alpha; \quad B=180^0-\alpha';$$
$$c=90^0-\beta'; \; b=90^0-\beta,$$

ergeben sich die Formeln:

$$\sin\frac{\beta'-\beta}{2}.\cos\tfrac{1}{2}\lambda=\cos\frac{\alpha'+\alpha}{2}.\sin\tfrac{1}{2}a$$
$$\cos\frac{\beta'+\beta}{2}.\sin\tfrac{1}{2}\lambda=\sin\frac{\alpha'+\alpha}{2}.\sin\tfrac{1}{2}a$$
$$\cos\frac{\beta'-\beta}{2}.\cos\tfrac{1}{2}\lambda=\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}.\cos\tfrac{1}{2}a$$
$$\sin\frac{\beta'+\beta}{2}.\sin\tfrac{1}{2}\lambda=\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}.\cos\tfrac{1}{2}a.$$

3. **Aufgabe: Aus den geographischen Breiten zweier Örter auf der Erde, und ihrem Längenunterschiede, ihre Azimuthe und ihre kürzeste Entfernung von einander zu finden.**

Die Breite wird nach Norden positiv gezählt. Das Azimuth heifst der Winkel zwischen dem Meridian des Orts und seiner kürzesten Entfernung von dem andern, von Süden durch Westen gezählt.

Die Lösung der Aufgabe liegt in den Formeln: 2. Wenn wir im Allgemeinen die Breiten als verschieden ansehen, und die gröfsere setzen $=\beta'$; die kleinere $=\beta$; den Längenunterschied $=\lambda$; die kürzeste Entfernung $=a$, so kommt:

$$\frac{\cos\frac{\beta'+\beta}{2}}{\sin\frac{\beta'-\beta}{2}}.tg\tfrac{1}{2}\lambda=tg\frac{\alpha'+\alpha}{2}$$

$$\frac{\sin\frac{\beta'+\beta}{2}}{\cos\frac{\beta'-\beta}{2}}.tg\tfrac{1}{2}\lambda=tg\frac{\alpha'-\alpha}{2}.$$

4. **Beispiel: Aus den geographischen Breiten und dem Längenunterschiede von Petersburg und Paris die Azimuthe dieser beiden Örter und ihre kürzeste Entfernung von einander zu berechnen.**

In dem sphärischen Dreieck: Nordpol, Petersburg, Paris, sind:

1) der Längenunterschied: λ, der Winkel ihrer Meridiane am Nordpol,
$$=27^0\ 59'\ 30'';$$

2) die den Winkel einschliefsenden Seiten, die Ergänzungen ihrer Breiten zu 90^0:
$$\beta'=59^0\ 26'\ 23'';$$
$$\beta=48^0\ 51'\ 54'';$$

3) die jenem Winkel gegenüber liegende Seite: a, die kürzeste Entfernung der Örter von einander;

4) die zu β' und β gehörigen Azimuthe:

α' die Ergänzung des Winkels im Dreieck zwischen dem Meridian von Petersburg und der Seite a zu 180°;

α der Winkel im Dreieck zwischen dem Meridian von Paris und der Seite a.

Hieraus ergiebt sich die Rechnung, wie folgt:

$$\frac{\beta'+\beta}{2} = 54^\circ\ 59'\ 8''\,5;\quad log.\ sin\ \frac{\beta'+\beta}{2} = 9{,}9087943$$

$$\frac{\beta'-\beta}{2} = 5^\circ\ 17'\ 14''\,5;\quad log.\ cos\ \frac{\beta'+\beta}{2} = 9{,}7676246$$

$$log.\ sin\ \frac{\beta'-\beta}{2} = 8{,}9644997$$

$$log.\ cos\ \frac{\beta'-\beta}{2} = 9{,}9981482$$

$$\tfrac{1}{2}\lambda = 13^\circ\ 59'\ 45'';\quad log.\ tg\ \tfrac{1}{2}\lambda = 9{,}3966362.$$

$$log.\ cos\ \frac{\beta'+\beta}{2} = 9{,}7676246;\quad log.\ sin\ \frac{\beta'+\beta}{2} = 9{,}9087943$$

$$log.\ tg\ \tfrac{1}{2}\lambda = 9{,}3966362;\ \ldots\ldots\ldots\ 9{,}3966362$$

$$9{,}1642608 \qquad\qquad 9{,}3054305$$

$$log.\ sin\ \frac{\beta'-\beta}{2} = 8{,}9644997;\quad log.\ cos\ \frac{\beta'-\beta}{2} = 9{,}9981482$$

$$log.\ tg\ \frac{\alpha'+\alpha}{2} = 0{,}1997611;\quad log.\ tg\ \frac{\alpha'-\alpha}{2} = 9{,}3072823$$

$$\frac{\alpha'+\alpha}{2} = 57^\circ\ 44'\ 8''\ 17$$

$$\frac{\alpha'-\alpha}{2} = 11\ 28\ 10{,}62.$$

$$\alpha' = 69^\circ\ 12'\ 18''\ 79$$

$$\alpha = 46^\circ\ 15'\ 57''\ 55.$$

Zur Berechnung der Seite a, giebt die sphärische Trigonometrie:

$$\frac{sin\,\lambda\,.\,cos\,\beta'}{sin\ \alpha} = sin\ a;\quad \frac{sin\,\lambda\,.\,cos\,\beta}{sin\ \alpha'} = sin\ a;$$

die vorhin erhaltenen data geben

$$log.\ sin\ \lambda = 9{,}6714904;\quad log.\ sin\ \lambda = 9{,}6714904$$

$$log.\ cos\ \beta' = 9{,}7062436 \qquad log.\ cos\ \beta = 9{,}8181173$$

$$9{,}3777340 \qquad\qquad 9{,}4896077$$

$$log.\ sin\ \alpha = 9{,}8588720 \qquad log.\ sin\ \alpha' = 9{,}9707456$$

$$log.\ sin\ a = 9{,}5188620 \qquad log.\ sin\ a = 9{,}5188621$$

$$a = 19^\circ\ 17'\ 5''39.$$

5. Auf gleiche Weise ergiebt sich für das Dreieck: Nordpol, Königsberg, Berlin, für die Annahmen:

$$\beta' = 54^\circ\ 42'\ 50''$$
$$\beta = 52\ \ 31\ \ 16$$
$$\lambda = 7\ \ 6\ \ 54$$

das Resultat:

$$\alpha' = 65^\circ\ 26'\ 33''\ 77$$
$$\alpha = 59^\circ\ 42'\ 39''\ 49$$
$$\mathrm{a} = 4^\circ\ 45'\ 10''\ 89.$$

6. Zur unmittelbaren Berechnung des a, aus β', β, λ, dienen die Formeln:

$$\cot\beta' . \cos\lambda = tg\,\omega$$

$$\cos \mathrm{a} = \frac{\sin\beta'}{\cos\omega}\sin(\beta+\omega);$$

also, für die Annahmen in 4.

$$\log.\cot\beta' = 9{,}7711926; \qquad \beta = 48^\circ\ 51'\ 54''$$
$$\log.\cos\lambda = 9{,}9459685; \qquad \omega = 27\ \ 32\ \ 13\ \ 21$$
$$\log.\,tg\,\omega = 9{,}7171611 \qquad \beta+\omega = 76\ \ 24\ \ 7\ \ 21$$
$$\omega = 27^\circ\ 32'\ 13''\ 21$$

$$\log.\sin(\beta+\omega) = 9{,}9876525$$
$$\log.\sin\beta' = 9{,}9350509$$
$$9{,}9227034$$
$$\log.\cos\omega = 9{,}9477828$$
$$\log.\cos\mathrm{a} = 9{,}9749206$$
$$\mathrm{a} = 19^\circ\ 17'\ 5''\ 4$$

wie oben.

7. **Aufgabe:** Aus gegebenen: β, α, a,
zu finden: β', α', λ.

Zur Auflösung dienen die Formeln:

$$\frac{\sin\left(45^\circ+\frac{\mathrm{a}-\beta}{2}\right)}{\sin\left(45^\circ-\frac{\mathrm{a}+\beta}{2}\right)}\,tg\,\tfrac{1}{2}\alpha = tg\,\frac{\alpha'+\lambda}{2}$$

$$\frac{\cos\left(45^\circ+\frac{\mathrm{a}-\beta}{2}\right)}{\cos\left(45^\circ-\frac{\mathrm{a}+\beta}{2}\right)}\,tg\,\tfrac{1}{2}\alpha = tg\,\frac{\alpha'-\lambda}{2}.$$

Also, für die data in 4:

$$\beta = 48^\circ\ 51'\ 54''$$
$$\mathrm{a} = 19\ \ 17\ \ 5\ \ 39$$
$$\alpha = 46\ \ 15\ \ 57\ \ 35$$

$$\frac{a+\beta}{2} = 34^\circ\ 4'\ 29''\ 69$$

$$45^\circ - \frac{a+\beta}{2} = 10\ \ 55\ \ 30\ 30$$

$$\frac{a-\beta}{2} = -14\ \ 47\ \ 24\ 30$$

$$45^\circ + \frac{a-\beta}{2} = 30\ \ 12\ \ 35\ 60$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha = 23\ \ 7\ \ 58\ 62$$

$$log.\ sin\left(45^\circ + \frac{a-\beta}{2}\right) = 9{,}7017139; \qquad log.\ cos\left(45^\circ + \frac{a-\beta}{2}\right) = 9{,}9366083$$

$$log.\ sin\left(45^\circ - \frac{a+\beta}{2}\right) = 9{,}2776671; \qquad log.\ cos\left(45^\circ - \frac{a+\beta}{2}\right) = 9{,}9920567$$

$$0{,}4240468 \qquad\qquad 9{,}9445516$$

$$log.\ tg\ \tfrac{1}{2}\alpha = 9{,}6306475 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 9{,}6306475$$

$$log.\ tg\ \frac{\alpha'+\lambda}{2} = 0{,}0546943; \qquad log.\ tg\ \frac{\alpha'-\lambda}{2} = 9{,}5751991$$

$$\tfrac{1}{2}(\alpha'+\lambda) = 48^\circ\ 35'\ 54''\ 20$$

$$\tfrac{1}{2}(\alpha'-\lambda) = 20\ \ 36\ \ 24\ \ 30$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha' = 69^\circ\ 12'\ 18''\ 50 \\ \lambda = 27\ \ 59\ \ 29\ \ 90\end{array}\right\}\ \text{bis auf die Secunde, wie oben.}$$

Nun wird β' berechnet nach den Formeln:

$$cos\ \beta' = \frac{sin\,\alpha\,.\,sin\,a}{sin\,\lambda} = \frac{sin\,\alpha\,.\,cos\,\beta}{sin\,\alpha'}$$

$$log.\ sin\ \alpha = 9{,}8588745; \ \ldots\ldots\ldots\ 9{,}8588745$$

$$log.\ sin\ a = 9{,}5188596; \qquad log.\ cos\ \beta = 9{,}8181148$$

$$9{,}3777341 \qquad\qquad 9{,}6769893$$

$$log.\ sin\,\lambda = 9{,}6714905; \qquad log.\ sin\,\alpha' = 9{,}9707457$$

$$log.\ cos\ \beta' = 9{,}7062436; \qquad log.\ cos\ \beta' = 9{,}7062436$$

$$\beta' = 50^\circ\ 26'\ 23''$$

wie gegeben in 4.

8. **Aufgabe:** **Aus den gegebnen Breiten und der kürzesten Entfernung den Längenunterschied zu berechnen.**

Hiezu dient die Formel:

$$cos\ \tfrac{1}{2}\lambda = \sqrt{\frac{cos\,\frac{\beta'+\beta-a}{2}\,.\,cos\,\frac{\beta'+\beta+a}{2}}{cos\,\beta'\,.\,cos\,\beta}}.$$

Nach den Daten in 4.

$$\beta' + \beta = 108^\circ\ 18'\ 17''$$
$$a = 19\ 17\ 5{,}4$$
$$\beta' + \beta + a = 127\ 35\ 22{,}4$$
$$\frac{\beta' + \beta + a}{2} = 63\ 47\ 41{,}2$$

$$log.\ cos\ \frac{\beta' + \beta + a}{2} = 9{,}6450169$$
$$log.\ cos\ \frac{\beta' + \beta - a}{2} = 9{,}8531680$$
$$9{,}4981849$$
$$log.\ cos\ \beta' = 9{,}7062436$$
$$log.\ cos\ \beta = 9{,}8181173$$
$$9{,}5243609$$
$$log.\ cos\ \tfrac{1}{2}\lambda = 9{,}9869120$$
$$\tfrac{1}{2}\lambda = 13^\circ\ 59'\ 45''$$
$$\lambda = 27\ 59\ 30$$

wie gegeben in 4.

9. Wenn wir in der mathematischen Geographie, bei Betrachtung der Erde als Kugel stehen bleiben und bei Bestimmung der Örter auf ihr; ihrer Lagen und Entfernungen; mit Ausschlufs der mehr die Astronomie oder die Nautik berührenden Fragen: so werden ihre wichtigsten Aufgaben nach den von 1. bis 8. gegebenen Beispielen, oder auf ähnliche Weise durch Lehnsätze aus der sphärischen Trigonometrie ihre Erledigung finden.

Es kommt aber nunmehr zunächst darauf an, die berechneten Bogen in einem Längenmaafs auszudrücken, und umgekehrt: Längen auf der Erdoberfläche in Bogen. Hiezu wird in Folgendem der Weg gezeigt.

10. Setzt man den Erdquadranten (90°) gleich 10 Millionen Mètres, so ist der mittlere Grad

$$= \frac{10^{\text{mill.}}}{90}\ \text{mètres} = 111111^{\text{m}}111\ldots = \text{M.}$$

also:

$$1''\ \text{Bogen} = 30^{\text{m}}86;$$

der mittlere Halbmesser:

$$r = \frac{180\ \text{M.}}{\pi};\qquad \pi = \frac{355}{113}$$

$$r = \frac{20^{\text{mill.}}113}{355}\ \text{mètres} = 6366197^{\text{m}}18$$

$$log.\ r = 6{,}8038798\ \text{in mètres}$$

$$log.\ \frac{1}{r} = 3{,}1961208\ldots\ldots$$

Das königliche topographische Büreau, in einer Instruction Sr. Excel. des Generals v. Müffling, für die Geodäten, bestimmt:

$$log.\ 1^m = 9{,}4240917 \text{ in Preufs. Ruthen}$$

also
$$1^m = 0{,}^R26551 \ldots \text{ Preufs. R.}$$

und
$$log.\ 1^R = 0{,}^m5759083 \text{ in mètres.}$$

Aus

$$log.\ r = 6{,}8038798 \text{ in mètres}$$

und
$$log.\ 1^m = 9{,}4240917 \text{ in Pr. R.}$$

er giebt sich:
$$log.\ r = 6{,}2279715 \text{ in Pr. R.}$$

Nach der Instruction ist, wenn wir a den Halbmesser des Äquators nennen,

$$log.\ a = 6{,}2287039 \text{ in Pr. R., und,}$$

wenn wir r den mittleren Halbmesser nennen

$$log.\ r = 6{,}22798 \ldots \text{ in Pr. R.}$$

in sofern wir hier mit diesem Ausdruck das arithmetische Mittel zwischen dem Äquatorhalbmesser und der halben Erdaxe bezeichnen wollen.

Der Unterschied dieser Zahlen von den vorhin berechneten kommt von der Abweichung der Figur der Erde von der Kugelgestalt: wir werden aber für kleine Bogen zu ihrer Verwandelung in Längen, ohne merklichen Fehler den vorhin gefundenen *log.* r in Anwendung bringen dürfen.

11. Die Länge des Erdhalbmessers erlaubt, Bogen bis zu einer gewissen Grenze, als gerade Linien anzusehen und umgekehrt, ohne merklichen Fehler. Zur Beurtheilung dieses letzteren wird folgende Bemerkung dienen:

Es ist in Theilen des Radius

$$arc\ 1^o = 0{,}0174532$$
$$sin\ 1^o = 0{,}0174524$$
$$tg\ 1^o = 0{,}0174551$$

also:
$$arc\ 1^o - sin\ 1^o = 0{,}0000008 = 5^m1$$
$$tg\ 1^o - arc\ 1^o = 0{,}0000019 = 12^m0$$

ferner:
$$arc\ 30' = 0{,}0087266$$
$$sin\ 30' = 0{,}0087265$$
$$tg\ 30' = 0{,}0087269$$

also:
$$arc\ 30' - sin\ 30' = 0{,}0000001 = 0^m6$$
$$tg\ 30' - arc\ 30' = 0{,}0000003 = 1^m9$$

woraus sich ergiebt, dafs, wenn auf 7 Meilen Länge der Bogen mit seinem Sinus oder seiner Tangente verwechselt wird, der dabei begangne Fehler noch nicht 1 oder 2 Mètres erreicht, also für ganz unmerklich bei kleineren Bogen zu erachten ist.

Daher ist auch das Polygon, welches bei dem Messen auf der Erde, die Richtung eines Bogens verfolgend um denselben mit einem Längenmaafsstabe beschrieben wird, auf die gröfsten Weiten hin, in welchen dergleichen Messungen vorgenommen werden, ohne merklichen Fehler,

dem Bogen selbst gleich zu setzen. Um uns hievon zu überzeugen, nehmen wir an, die Preufsische Ruthe, A, sei ein solcher Längenmaafsstab und φ der Bogen, der zwischen ihre Endpunkte fällt;

$$arc\,\varphi = \frac{A}{r}$$

so ist:

$$\begin{aligned} log.\ A &= 0{,}5759083 \text{ in mètres} \\ log.\ r &= 6{,}8038798 \ldots\ldots. \\ log.\ arc\,\varphi &= 3{,}7720285 - 10 \\ log.\ arc\,1'' &= 4{,}6855749 - 10 \\ & \quad 9{,}0864536 \text{ in Secunden} \end{aligned}$$

daher $\varphi = 0''\ 121$

Dies giebt auf 1000 ausgelegte Ruthen $120'' = 2'$, wofür $sin = tg = 0{,}0005818$; mithin auf eine Messung von 1000 Ruthen Länge kein 10 Milliontheil des Erdradius zwischen dem Bogen und dem über demselben mit der Ruthe beschriebenen Polygon.

12. Die Zulässigkeit, kleine Bogen auf der Erdoberfläche als gerade Linien anzusehen, giebt Mittel, die Berechnung kleiner sphärischer Dreiecke auf die, geradlinigter, zurück zu führen. Um dies zu zeigen, betrachten wir die bekannten Reihen, worin die trigonometrischen Functionen in Bogen ausgedrückt werden:

$$sin\ a = a - \frac{a^3}{6} + \frac{a^5}{120} - \ldots.$$

$$cos\ a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} - \ldots.$$

$$tg\ a = a + \frac{a^3}{3} + \frac{2a^5}{15} + \ldots. \quad ^{*)}$$

Setzen wir: $a = 30' = 0{,}0087266$ in Theilen des Radius, so ist

$$log.\ a = 7{,}9408451$$

$$log.\ a^3 = 3{,}8225353$$

$$\frac{a^3}{3} = 0{,}0000002$$

Wird also mit 7 Decimalstellen gerechnet, so läfst sich ohne Fehler setzen:

$$sin\ a = a - \frac{a^3}{6}.$$

$$cos\ a = 1 - \frac{a^2}{2}.$$

$$tg\ a = a + \frac{a^3}{3}.$$

13. Man kann annehmen, dafs in den Dreiecken erster Ordnung in einem geodätischen Dreiecknetze, solchen nämlich, deren drei Winkel durch unmittelbare Messung bestimmt

*) von Radowitz Handbuch etc. S. 304.

werden, die gröfste Seite eines derselben 35000 Toisen nicht viel übersteige. Setzen wir diese: A.

Nach der Instruction ist:

$$log.\ 1^m = 9,7101800 \text{ in Toisen}$$
$$1^m = 0^t 513074.$$

Nun ist

$$log.\ A = 4,5440680 \text{ in Toisen}$$
$$log.\ 1^m = 9,7101800 \ldots.$$
$$log.\ A = 4,8338880 \text{ in mètres}$$
$$log.\ r = 6,8038798 \ldots.$$
$$log.\ arc\ 1'' = 4,6855749$$
$$1,4894547$$
$$log.\ A = 2,3444333 \text{ in Secunden}$$
$$A = 2210''\ 2 = 36'\ 50''\ 2.$$

A in Theilen des rad.

$$= 0,010714 \ldots. = a$$
$$log.\ a = 8,0299516$$

woraus kommt: $\frac{a^3}{6} = 0,0000002.$

Die von Suanberg in Lappland gemessene Basis ist

$$= 14451^m 116 = A.$$
$$log.\ A = 4,1599013;$$

woraus auf dieselbe Weise, wie vorhin sich ergiebt:

$A = 7'\ 58''\ 21$; $a^3 = 0,00000001$ in Theilen des Radius.

Und hieraus sieht man, dafs noch für Dreieckseiten der längsten Gattung, wenn man mit 7 Decimalstellen rechnet, gesetzt werden können die abgekürzten Werthe:

$$\sin a = a - \frac{a^3}{6}$$

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2}.$$

Wollen wir nun ein Dreieck berechnen von der angezeigten Art, dessen Seiten = a, b, c und der, der a gegenüberliegende, Winkel = A, so ist, es als ein sphärisches betrachtet:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b\ \sin c}$$

und wenn wir für Sinus, Cosinus, die obigen Ausdrücke in Bogen setzen, so kommt sofort:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

welches die für geradlinigte Dreiecke geltende Formel ist.

Hiernach, wenn die Seiten eines geodätischen Dreiecks keiner gröfseren Winkelweite angehören, das der von 1°, so läfst es sich, ohne merklichen Fehler, geradezu, als ein geradelinigtes berechnen.

Für gröfsere Bogen ist eine gröfsere Schärfe erforderlich. Sie lassen sich aber mit Hülfe ihres sphärischen-Excesses ebenfalls als gerade Linien behandeln, nach einem Theorem, welches, nach seinem Erfinder, das Legendresche heifst.

14. Der sphärische Excefs ist der Überschufs der Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks über zwei Rechte. Setzen wir ihn $=\varepsilon$; den Flächeninhalt des Dreiecks $=\Delta$; und: r den zu dem Dreieck gehörigen Halbmesser, so lehrt die sphärische Trigonometrie, dafs:

$$\varepsilon=\frac{\Delta}{r^2}.$$

Wäre nun das Dreieck ein gleichseitiges und jede Seite $=1^\circ$, so findet sich dafs der sphärische Excefs noch nicht eine halbe Minute, genau $=27''\,2$, betrüge. Er wird sich also unmerklich ändern, wenn wir in dem Ausdruck $\frac{\Delta}{r^2}$, in sofern die Seiten nicht viel gröfser als 1°, den Flächeninhalt so berechnen, als wären dieselben geradlinigt. Für das Dreieck in 13. erhalten wir so

$$\varepsilon=\frac{bc\sin A}{2r^2}.$$

15. Dehnen wir nun die Rechnung aus, bis auf Gröfsen der Ordnung a^4, und setzen daher

$$\sin a=a-\frac{a^3}{6};\quad \cos a=1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24};$$

ähnlich: $\sin b$, $\cos b$; $\sin c$, $\cos c$; in abgekürzten Reihen, in den exacten Ausdruck: 13.

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\,\cos c}{\sin b\,\sin c},$$

und gehen in der Rechnung nicht über die Bogen der Ordnung a^4 hinaus, so ergiebt sich leicht:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+\frac{a^4+b^4+c^4-2\,(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{24}$$

betrachten wir hierauf das erste Glied als die Formel für ein geradlinigtes Dreieck, dessen Seiten: a, b, c, und A' der, der Seite a gegenüberliegende, Winkel,

so wird $$\cos A'=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$$

und $$-\frac{bc}{6}\sin A'^2=\frac{a^4+b^4+c^4-2\,(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{24}.$$

Also $$\cos A=\cos A'-\frac{bc}{6}\sin A'^2;$$ also, nach 14; $r=1$ gesetzt,

$$=\cos A'-\frac{\varepsilon}{3}\sin A',$$ und, wegen der Kleinheit von $\frac{\varepsilon}{3}$,

$$=\cos\left(A'+\frac{\varepsilon}{3}\right),$$ daher

$$A=A'+\frac{\varepsilon}{3}.$$

Woraus sich ergiebt, dafs ein in die angegebnen Grenzen fallendes sphärisches Dreieck sich als ein geradlinigtes berechnen lasse, wenn jeder seiner Winkel um ein Drittel des sphärischen Excesses verkleinert worden ist.

16. Hiernach wird der sphärische Excefs eines Dreiecks ein besonders wichtiges Element geodätischer Berechnungen: daher wir seine Berechnung an einem aus der v. Müffling-schen Instruction genommenen Beispiel zeigen wollen.

Das Dreieck n. 5. des darin gegebenen Dreiecknetzes:

Hasseroth, Düsberg, Kuhfeld,

heifse in dieser Folge: a b c

so ist:
$$\varepsilon = \frac{ab \,.\, bc \,.\, \sin b}{2 r^2 \, arc\, 1''}, \text{ in Secunden.}$$

Da in diesem Ausdruck das r^2 so sehr überwiegend ist, so dürfen ab, bc, nur ungefähr bekannt sein. Sie werden dort angegeben, nach Eckhardt:

$$bc = 37400^m$$
$$ab = 45000^m;$$

gemessen ist
$$b = 44^0\ 32'\ 35''\,8.$$

Daher:

$$\log.\ 0{,}5 = 9{,}69897 - 10$$
$$\log.\ bc = 4{,}57288$$
$$\log.\ ab = 4{,}65347$$
$$\log.\ \sin b = 9{,}84699 - 10$$
$$\log. \frac{1}{r^2\, arc\, 1''} = 1{,}70672 - 10$$
$$0{,}47903 \text{ in Secund.}$$
$$\varepsilon = 3''\,01.$$

$$\log. \frac{1}{r} = 3{,}19612 - 10$$
$$\log. \frac{1}{r^2} = 6{,}39224 - 20$$
$$\log. \frac{1}{arc\, 1''} = 5{,}31448$$
$$\log. \frac{1}{r^2\, arc\, 1''} = 1{,}70672 - 10$$

Da jedes horizontale Dreieck auf der Erdoberfläche ein sphärisches ist, dessen drei Winkel $= 180^0 +$ dem sphärischen Excefs sein müssen, so wird der Unterschied zwischen dem durch Messung gefundenen Überschufs und dem berechneten sphärischen Excefs als Beobachtungsfehler betrachtet, und dem gemäfs werden die Winkel des Dreiecks corrigirt.

In dem gewählten Beispiel sind

	die gemessenen Winkel:					corrigirt			
a =	55°	0'	55"	74	....	55°	0'	55"	66
b =	44	32	35	80	....	44	32	35	72
c =	80	26	31	72	....	80	26	31	63
	180	0	3	26		180	0	3	01

sphär. Excefs .... 3" 01

Fehler der Beobachtung: 0" 25

hievon auf jeden Winkel ⅓ = 0" 08.

17. Da in 14. der Flächeninhalt eines geradlinigten Dreiecks gesetzt ist für den eines sphärischen, so wollen wir für kleine Dreiecke den sphärischen Excefs nach der einen und nach der andern Annahme berechnen. Für gleichseitige sphärische Dreiecke, deren Seite $=$ a, der Winkel $=$ A ist

$$\cos A = \frac{2\cos a \sin\frac{1}{2}a^2}{\sin a}$$

und $$\varepsilon = 3A - 180^\circ.$$

Hiernach findet sich:

für	$a = 1^\circ$;	$= 30'$;	$= 15'$
	$\varepsilon = 27''\,12$;	$= 6''\,81$	$= 1''\,65$

und nach der obigen Formel 16. berechnet:

$$\varepsilon = 27''\;2 \qquad = 6''\;8 \qquad = 1''\;7.$$

Die Instruction enthält unter den ihr beigefügten Hülfstafeln eine, No. II, worin der Ausdruck

$$\log.\,\frac{1}{2r^2 \sin 1''}$$

vom 45sten bis zum 60sten Grad der Breite berechnet ist. Sie dient zur schnellen Berechnung des sphärischen Excesses, und die Werthe ändern sich mit r von Grad zu Grad, wegen der nicht kugelförmigen Gestalt der Erde.

18. Die trigonometrische Function eines Bogens, Sinus, Tangente, eine bloſse Verhältnifszahl, wird, multiplicirt mit der Länge des dazu gehörigen Halbmessers, in ein Längenmaafs verwandelt. In geodätischen Berechnungen ist es oft nöthig, die trigonometrische Funktion, als Länge gegeben, in Bogen zu verwandeln, und umgekehrt. Hiezu gelangt man auf folgende Weise:

Für kleine Bogen ist:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} = \varphi\left(1 - \frac{\varphi^2}{6}\right)$$

daher

$$\log.\sin\varphi = \log.\varphi + \log.\left(1 - \frac{\varphi^2}{6}\right)$$

$$= \log.\varphi - \frac{1}{\log.\,nat\,10}\cdot\frac{\varphi^2}{6}$$

$$= \log.\varphi - 0{,}0724\,.\,\varphi^2.$$

Ferner ist

$$r\sin\varphi = r\varphi\left(1 - \frac{\varphi^2}{6}\right).$$

Sei $r\sin\varphi = \sin A$, ein Sinus in Längenmaafs gegeben, und demgemäfs: $r\varphi = A$, der dazu gehörige Bogen in Längenmaafs, so ist

$$\log.\sin A = \log.A\left(1-\frac{A^2}{6r^2}\right)$$
$$= \log.A - 0{,}0724\left(\frac{A}{r}\right)^2$$
$$\log.A = \log.\sin A + 0{,}0724\left(\frac{A}{r}\right)^2.$$

Ist nun der Sinus gegeben, und es soll der Bogen gefunden werden, so setzt man in das zweite Glied der Gleichung, rechts, *sin* A statt A annäherungsweise. Dann ist:

$$\log.\frac{A}{\sin A} = 0{,}0724\left(\frac{\sin A}{r}\right)^2.$$

Hiernach läfst sich zwischen zwei Grenzen des *sin* A eine Tafel für $\log.\frac{A}{\sin A}$ berechnen, woraus man sofort *log.* A aus jedem *sin* A durch leichte Rechnung erlangt.

19. Für gröfsere Bogen rechnen wir mit 5 Decimalstellen und setzen für r den Krümmungshalbmesser des Bogens, nach der davon weiterhin zu gebenden Theorie. Sei dann

$$M = r\ arc\ 1^\circ = \frac{r\pi}{180},\ \text{so ist}$$
$$\frac{\sin A}{r} = \frac{\sin A\,.\,\pi}{180\,.\,M};$$
$$\log.A = \log.\sin A + 0{,}0724\,.\left(\frac{\pi}{180\,.\,M}\right)^2 \sin A^2.$$
$$= \log.\sin A + 0{,}00002204\,.\left(\frac{\sin A}{M}\right)^2$$

um hiernach Sinus gröfserer Bogen in Bogen zu verwandeln und umgekehrt, ist eine Hülfstafel zur Findung der M erfoderlich, deren Princip erst in der Folge erläutert werden kann.

20. Exempel:

1) für kleine Bogen von 2′ bis 6′ 30″.

Gegeben:	$\log.\sin A = 3{,}000$		$\log.\sin A = 4{,}500$
	$\log.r = 6{,}228$	. . . .	6,228
	6,772		8,272
	$\log.\left(\frac{\sin A}{r}\right)^2 = 3{,}544 - 10$	. . . .	6,544 — 10
	$\log.0{,}0724 = 8{,}860 - 10$	. . . .	8,860 — 10
	$\log.\log.\frac{A}{\sin A} = 2{,}404 - 10$	. . . .	5,404 — 10
	$\log.\frac{A}{\sin A} = 0{,}0000000253$	. . . .	0,0000253
	$\log.A = 3{,}0000000253$	. . . .	4,5000253

welches bis auf die letzte Ziffer mit den Angaben der Hülfstafel der Instruction übereinstimmt,

2) für gröſsere Bogen (Breite 45° bis 46°)

Gegeben:	$M = 29506,18$ Pr. R;	$M' = 29604,6$ Pr. R.
	$log.\, sin\, A = 4,89000$	$4,89000$
	$log.\, M = 4,46991$;	$log.\, M' = 4,47129$
	$0,42009$	$0,41871$
	$log.\left(\frac{sin\, A}{M}\right)^2 = 0,84018$	$log.\left(\frac{sin\, A}{M'}\right)^2 = 0,83742$
	$log.\, 0,00002204 = 5,34321 - 10$	$5,34321 - 10$
	$log.\, log.\, \frac{A}{sin\, A} = 6,18339 - 10$	$6,18063 - 10$
	$log.\, \frac{A}{sin\, A} = 0,0001525,4$	$0,0001515,7$
	$log.\, A = 4,8901525,4$	$4,8901515,7$
	$A = 77651,9714$. R.	$77651,79$. R.
Die Instruction hat:	$= 77651,9767$. R.	$77651,80$. R.

21. Auf ähnliche Weise lassen sich die Sinus in Tangenten verwandeln und umgekehrt: Es ist nämlich:

$$sin\, \varphi = \varphi\left(1 - \frac{\varphi^2}{6}\right)$$

$$sin\, \varphi^3 = \varphi^3\left(1 - \frac{\varphi^2}{6}\right)^3 = \varphi^3\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)$$

$$\frac{\varphi^3}{sin\, \varphi^3} = 1 + \frac{\varphi^2}{2}$$

$$tg\, \varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3} = \varphi\left(1 + \frac{\varphi^2}{3}\right)$$

$$\frac{tg\, \varphi}{sin\, \varphi} = \left(1 + \frac{\varphi^2}{3}\right)\left(1 + \frac{\varphi^2}{6}\right) = 1 + \frac{\varphi^2}{2} = \frac{\varphi^3}{sin.\, \varphi^3}.$$

$$log.\, \frac{tg\, \varphi}{sin\, \varphi} = 3\, log.\, \frac{\varphi}{sin\, \varphi};$$

mithin auch $$log.\, tg\, A = log.\, sin\, A + 3\, log.\, \frac{\varphi}{sin\, \varphi}$$

$$= log.\, sin\, A + 3\, log.\, \frac{A}{sin\, A},$$

und, wenn wir für das zweite Glied rechts den Werth setzen aus 18.

$$log.\, tg\, A = log.\, sin\, A + 3 \,.\, 0,0724\left(\frac{sin\, A}{r}\right)^2$$

$$= log.\, sin\, A + 0,2172\left(\frac{sin\, A}{r}\right)^2,$$ für kleine Bogen.

Für gröſsere Bogen wird, nach 19.

$$log.\ tg\,A = log.\ sin\,A + 3 . 0{,}00002204 \left(\frac{sin\,A}{M}\right)^2$$

$$= log.\ sin\,A + \quad 0{,}00006612 \left(\frac{sin\,A}{M}\right)^2.$$

22. Das von 1. bis 21. vorgetragne wird hinreichend sein zur Verständigung des Theiles der Geodäsie, welcher sich auf die Hypothese einer kugelförmigen Gestalt der Erde beschränkt.

Wir wenden uns nun im nächsten Capitel zu der Hypothese, welche mehr Wahrscheinlichkeit für sich hat, als jene.

Cap. II.

Die Erde als Sphäroid.

1. Man stellt sich die Erde vor als einen geometrischen Körper, entstanden durch Umwälzung einer Ellipse um ihre kleinere Hauptaxe.

2. Hieraus folgt, dafs die geographischen Erdmeridiane, welche durch die Endpunkte der Umdrehungsaxe gehen, sämtlich einander gleich und ähnlich sind.

3. Setzen wir den halben Äquatordurchmesser $= a$;
die halbe Umdrehungsaxe $= b$;
so ist die allgemeine Gleichung für einen Punkt auf dem Erdmeridian:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

wenn wir y und x als rechtwinkliche Coordinaten betrachten, deren Anfangspunkt die Mitte des Meridians; und die Axe der x durch den Äquatordurchmesser, die der y durch die Umdrehungsaxe ziehen.

4. Aus der Gleichung 3. folgt für zwei Punkte, (x, y); (x', y')

$$a^2 (y'^2 - y^2) + b^2 (x'^2 - x^2) = 0.$$

Wird durch diese zwei Punkte in der Ellipse eine gerade Linie gezogen, so ist deren Gleichung

$$y' - y = \gamma (x' - x);$$

γ eine Constante, so lange die beiden Punkte dieselben. Aus beiden Gleichungen folgt, wenn die beiden Punkte als zusammenfallend, die schneidende gerade, als eine berührende, gesucht werden:

$$\gamma = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

für jeden gegebenen Berührungspunkt (x, y).

Hieraus aber folgt, für den Winkel L, den eine durch den Berührungspunkt auf die Ellipse normal gezogne Linie mit dem Äquatordurchmesser macht:

$$tg\,L = \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Hiebei ist zu bemerken, daſs dieser Winkel L für jeden Ort auf der Erde durch astronomische Hülfsmittel gefunden werden kann, daher immer als gegeben zu betrachten ist. Er heiſst die geographische Breite, oder auch die Polhöhe des Ortes (x, y) und ist wie wir bald sehen werden, das wichtigste Element der Geodäsie.

5. Aus der Gleichung für tg L in 4 folgt:

$$a) \ldots\ldots x = \frac{a \cos L}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 \sin L^2)}}$$

wenn wir $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$, das Quadrat der Excentricität des Meridians, dividirt durch das des Äquatorhalbmessers, setzen $= \varepsilon^2$.

$$b) \ldots\ldots y = \frac{a(1 - \varepsilon^2) \sin L}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 \sin L^2)}};$$

$\frac{y}{tg\,L}$ ist der zwischen die Normal und die Ordinate y fallende Abschnitt des Äquatorhalbmessers. Nennen wir ihn: v, so ist

$$c) \ldots\ldots v = \frac{a(1 - \varepsilon^2) \cos L}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 \sin L^2)}}.$$

Also der Abschnitt zwischen der Normal und dem Anfangspunkt der Coordinaten:

$$d) \ldots\ldots x - v = \frac{a \varepsilon^2 \cos L}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 \sin L^2)}}.$$

Es ist ferner $\sqrt{(y^2 + v^2)}$ die Länge der Normal zwischen der Curve und dem Äquatorhalbmesser. Nennen wir sie n, so ist:

$$e) \ldots\ldots n = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 \sin L^2)}}.$$

$\frac{x - v}{ccs\,L}$ ist die Länge der Normal, vom Äquatorhalbmesser bis zur Umdrehungsaxe. Diese also, m genannt, ist:

$$f) \ldots\ldots m = \frac{a \varepsilon^2}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 \sin L^2)}}.$$

Aus e) und f) ergiebt sich die ganze Länge der Normal von der Curve bis zur Umdrehungsaxe,

$$g) \ldots\ldots m + n = \frac{a}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 \sin L^2)}}$$

n tg L ist die Länge der den Punkt (x, y) berührenden von diesem Punkte bis zum verlängerten Äquatordurchmesser. Nennen wir sie: t, so ist:

$$h) \ldots . \ t = \frac{a(1-\varepsilon^2)\, tg\, L}{\sqrt{(1-\varepsilon^2 \sin L^2)}}$$

$\sqrt{(x^2+y^2)}$ ist die Länge des zu dem Punkte (x, y) gehörenden Erdradius. Nennen wir ihn r, so ist:

$$i) \ldots . \ r = \frac{a\sqrt{(1-(2\varepsilon^2-\varepsilon^4)\sin L^2)}}{\sqrt{(1-\varepsilon^2 \sin L^2)}}.$$

Nennen wir L′ den Winkel, welchen der Erdradius des Ortes (x, y) mit dem Äquatordurchmesser macht, so ist $tg\, L' = \frac{y}{x}$, also

$$k) \ldots . \ tg\, L' = (1-\varepsilon^2)\, tg\, L.$$

Der Winkel L—L′ ist der, welchen die Normal in dem Punkte (x, y) mit dem Erdradius macht. Für ihn findet sich

$$l) \ldots . \ tg\,(L-L') = \frac{\varepsilon^2\, tg\, L}{1+(1-\varepsilon^2)\, tg\, L^2}.$$

Dies sind die vornehmsten in der Geodäsie in Betracht kommenden Functionen der geographischen Breite eines Ortes.

6. Ein Hauptelement aller geodätischen Rechnungen ist der Krümmungshalbmesser eines gegebenen Punktes auf der Oberfläche der Erde. Es ist derjenige Kreishalbmesser, mit welchem ein Kreisbogen, gezogen durch den gegebenen Punkt, mit zwei unendlich nahen Punkten der Kurve auf beiden Seiten des gegebenen zusammen fällt.

Nennen wir: ϱ den erwähnten Halbmesser eines durch den Punkt (x, y) zu beschreibenden Kreises. Die Coordinaten des Mittelpunktes dieses Letzteren: α parallel den x; β parallel den y. Die Gleichung für den mit ihm beschriebenen Kreis ist hiernach

$$\varrho^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2.$$

Für zwei unendlich nahe Punkte (x, y) können wir ϱ, α, β, nach der oben gegebenen Definition, konstant setzen. Wenn wir also den Punkt (x, y) unendlich wenig variiren, so kommt:

$$o = (x-\alpha)\, dx + (y-\beta)\, dy$$

und daraus, durch wiederholtes Differenziiren,

$$o = dx^2 + dy^2 + (y-\beta)\, d^2y.$$

Diese drei Gleichungen geben:

$$\varrho = \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Da in diesem Falle die rechtwinklichen Coordinaten: x, y, der Gleichung angehören

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2;$$

so sind die endlichen Werthe der Ausdrücke $\left(\frac{dy}{dx}\right)$; $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ hieraus zu entnehmen. Werden sie dann in obigem Ausdruck für ϱ in der ersteren Stelle gesetzt, so ergiebt sich

$$\varrho = \pm \frac{\{a^4 y^2 + b^4 x^2\}^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Werden nun noch y und x, mit Hülfe der in 4. gegebenen: Elementargleichungen, als Funktionen der geographischen Breite ausgedrückt, so erhalten wir den positiven Werth von ϱ;

$$\varrho = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin L^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es ist hier offenbar ausschliefslich die Rede gewesen von dem Krümmungshalbmesser eines Meridianbogens. Einen allgemeineren Begriff eines solchen erhalten wir, wenn wir das Erdsphäroid durch die Normale des Punktes (x, y) mit einer irgendwie gelegten Ebene schneiden und uns den Krümmungshalbmesser irgend eines dadurch auf der Erd-Oberfläche erhaltenen Schnittbogens vorstellen.

Die Betrachtung und nähere Bestimmung eines solchen bleibt für das folgende vorbehalten.

Wir wollen aber zuerst einige Rechnungen geben, welche die gegebene Theorie erläutern, ihre Anwendung zeigen, und überhaupt für praktische Arbeiten nützlich werden mögen.

7. Berechnung von $\log.(1-\varepsilon^2)$. Zum Grunde gelegt wird die Bestimmung der v. Müffling'schen Instruction:

$$\log.\varepsilon^2 = 7{,}8089667.$$

Nun ist, wenn wir, der Kürze wegen, setzen $\varepsilon^2 = u$

$$\log.(1-\varepsilon^2) = -\log.e\left[u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \dots\right]$$

wo e die Basis bezeichnet des natürlichen Logarithmensystems.

Aus

$\log. u = 7{,}8089667$	$\log. u^2 = 5{,}6179334$	$\log. u^3 = 3{,}4269001$
folgt $u = 0{,}0064412$	$u^2 = 0{,}0000415$	$u^3 = 0{,}0000003$
	$\frac{u^2}{2} = 0{,}0000207$	$\frac{u^3}{3} = 0{,}0000001$

$$
\begin{aligned}
u &= 0{,}0064412\\
\frac{u^2}{2} &= 0{,}0000207\\
\frac{u^3}{3} &= 0{,}0000001\\
\hline
&\ 0{,}0064620\\
\log. &= 7{,}8108103-10\\
\log.\log.e &= 9{,}6377798\\
\hline
&\ 7{,}4485901\\
\log.(1-\varepsilon^2) &= -0{,}0028093\\
&= 9{,}9971907-10
\end{aligned}
$$

daraus auch $\log.\sqrt{(1-\varepsilon^2)} = 9{,}9985953-10.$

8. Abweichung der Normal vom Erdradius, für Berlin.

Es ist: $$L - L' = \frac{\varepsilon^2 tg L}{1 + (1-\varepsilon^2) tg L^2}$$

nach 5. 1, wo wir, wegen Kleinheit des Winkels $L - L'$, den Bogen statt der Tangente setzen;

$$= \frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin 2L}{1 - \varepsilon^2 \sin L^2}$$

und, $\varepsilon^2 \sin L^2 = u$ gesetzt,

$$= \frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin 2L}{arc\, 1''}[1-u]^{-1}, \text{ in Secunden.}$$

Daher:

$$\log.(L - L') = \log.\left[\frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin 2L}{arc.1''}\right] + \log. e\left[u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots\right].$$

Für Berlin ist $L = 52^0\ 31'\ 16''$

$\log. \sin L = 9{,}8995894$	$\log. u^2 = 5{,}2162910$	$\log. u^3 = 2{,}8244365$
$\log. \sin L^2 = 9{,}7991788$	$u^2 = 0{,}0000164$	$u^3 = 0{,}00000006$
$\log. \varepsilon^2 = 7{,}8089667$	$\frac{u^2}{2} = 0{,}0000082$	$\frac{u^3}{3} = 0{,}00000002$
$\log. u = 7{,}6081455$		
$u = 0{,}0040564$		

$$u = 0{,}0040564$$
$$\frac{u^2}{2} = 0{,}0000082$$
$$0{,}0040646$$
$$\log. = 7{,}6090178$$
$$\log.\log. e = 9{,}6377798$$
$$\log.\left[\log. e\left(u + \frac{u^2}{2} + \ldots\right)\right] = 7{,}2467976$$
$$\log. e\left[u + \frac{u^2}{2} + \ldots\right] = 0{,}0017652$$
$$\log. \sin 2L = 9{,}9848579$$
$$\log. \varepsilon^2 = 7{,}8089667$$
$$\log. e\left[u + \frac{u^2}{2} + \ldots\right] = 0{,}0017652$$
$$7{,}7955898$$
$$\log. 2 = 0{,}3010300$$
$$\log. arc\, 1'' = 4{,}6855749$$
$$4{,}9866049$$
$$\log.(L - L') = 2{,}8089849$$
$$L - L' = 644''\ 14 = 10'\ 44''\ 14.$$

9. Berechnung des Krümmungshalbmessers ϱ des Meridians, für Berlin.

$$\varrho = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin L^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots 6.$$

$\varepsilon^2 \sin L^2 = u$ gesetzt, ist

$$log. \frac{1}{(1-u)^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{3}{2}\, log.\, e \left[u + \frac{u^2}{2} + \dots\right]$$

$$log.\, e.\left[u + \frac{u^2}{2} + \dots\right] = 0{,}0017652, \text{ nach } \dots\dots 8.$$

$$\tfrac{3}{2}\, log.\, e \left[u + \frac{u^2}{2} + \dots\right] = 0{,}0026478$$

$$log.\,(1-\varepsilon^2) = 9{,}9971907, \text{ nach } \dots\dots 7.$$

$$log.\, a = 6{,}2287039, \text{ nach Cap. I. 10.}$$

$$log.\, \varrho = 6{,}2285424, \text{ in Pr. R.}$$

$$\varrho = 1692553^R 5.$$

10. Berechnung des Halbmessers des Parallelkreises für Berlin.

Dieser Halbmesser ist gleich dem x . . . . . 5. a)

$$x = \frac{a \cos L}{(1-\varepsilon^2 \sin L^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$log.\, \cos L = 9{,}7842385$$

$$log.\,(1-\varepsilon^2 \sin L^2)^{-1} = 0{,}0017652, \text{ nach } \dots\dots 8.$$

$$log.\,(1-\varepsilon^2 \sin L^2)^{-\frac{1}{2}} = 0{,}0008826$$

$$log.\, a = 6{,}2287039$$

$$log.\, x = 6{,}0138250 \text{ in Pr. R.}$$

$$x = 1032345^R 4.$$

11. Berechnung des Erdhalbmessers r, für Berlin.

Es ist $r = \frac{x}{\cos L'}$; $x = \frac{a \cos L}{(1-\varepsilon^2 \sin L^2)^{\frac{1}{2}}}$; $tg\, L = \frac{tg L'}{1-\varepsilon^2}$

Daraus:

$$x = \frac{a\sqrt{(1-\varepsilon^2)}\,.\cos L'}{(1-\varepsilon^2 \cos L'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$r = \frac{a\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}{(1-\varepsilon^2 \cos L'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzen wir $\varepsilon^2 \cos L'^2 = u$, so ist hiernach:

$$log.\, r = log.\,[a\sqrt{(1-\varepsilon^2)}] + \tfrac{1}{2}\, log.\, e \left[u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \dots\right].$$

Für Berlin ist $L = 52^0\ 31'\ 16''$

$L - L' = 10'\ 44''\ 14$ nach . . . . 8.

$L' = 52\ \ 20\ \ 31\ \ 86$

$log.\, \cos L' = 9{,}7860018$	$log.\, u^2 = 4{,}7619406$
$log.\, \cos L'^2 = 9{,}5720036$	$u^2 = 0{,}0000058$
$log.\, \varepsilon^2 = 7{,}8089667$	$\frac{u^2}{2} = 0{,}0000029$
$log.\, u = 7{,}3809703$	
$u = 0{,}0024097$	

$$u = 0{,}0024097$$
$$\frac{u^2}{2} = 0{,}0000029$$
$$0{,}0024126$$
$$log. = 7{,}3824853$$
$$log.\ log.\ e = 9{,}6377798$$
$$7{,}0202651$$
$$log.\ e\left\{u + \frac{u^2}{2} \ldots\right\} = 0{,}0010477$$
$$\tfrac{1}{2}\ log.\ e\left\{u + \frac{u^2}{2} \ldots\right\} = 0{,}0005238$$

$$log.\ a = 6{,}2287039$$
$$log \sqrt{(1-\varepsilon^2)} = 9{,}9985953$$
$$\tfrac{1}{2}\ log.\ e\left\{u + \frac{u^2}{2} + \ldots\right\} = 0{,}0005238$$
$$log.\ r = 6{,}2278230$$
$$r = 1689758^R9$$

Zur Probe der Rechnung bestimmen wir x aus dem gefundenen r

$$x = r\ cos\ L'$$

Es ist

$$log.\ r = 6{,}2278230$$
$$log.\ cos\ L' = 9{,}7860018$$
$$log.\ x = 6{,}0138248 \text{ in Pr. R.}$$

zu vergleichen mit 10.

12. Mit dem Krümmungshalbmesser, ϱ (9.) berechnen wir den Meridiangrad; mit dem Halbmesser, x, des Parallelkreises, einen Grad des letzteren. Es ist nämlich, wenn wir jenen Grad: G, diesen: P nennen:

$$G = \varrho\ .\ arc\ 1^\circ$$
$$P = x\ .\ arc\ 1^\circ$$
$$log.\ \varrho = 6{,}2285424 \quad \text{nach} \ldots\ 9.$$
$$log.\ x = 6{,}0138253 \quad \text{nach} \ldots\ 10.$$
$$log.\ arc\ 1^\circ = 8{,}2418776$$
$$\left.\begin{array}{l} log.\ G = 4{,}4704200 \\ log.\ P = 4{,}2557029 \end{array}\right\} \text{in Pr. R.}$$
$$\left.\begin{array}{l} G = 29540^R6 \\ P = 18017^R89 \end{array}\right\} \text{für Berlin.}$$

13. Der Krümmungshalbmesser (9.) verlängert sich mit zunehmender Breite L. Es ist nützlich die Änderungen desselben, für kleine Zwischenräume, nach den verschiedenen Breiten kennen zu lernen. Berechnen wir also die Änderung des Krümmungshalbmessers für Minutenänderungen unter der Breite von Berlin.

Es ist:

$$\varrho = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\ sin\ L^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$log.\ \varrho = log.\ a(1-\varepsilon^2) - \tfrac{3}{2}\ log.\ (1-\varepsilon^2\ sin\ L^2)$$
$$d.\ log.\ \varrho = \tfrac{3}{2}\ .\ \frac{\varepsilon^2\ sin\ 2L}{1-\varepsilon^2\ sin\ L^2}\ .\ arc\ 1'$$
$$= 3(L-L')\ arc\ 1''\ \ arc\ 1'\ .\ log.\ e$$

in Secunden, verglichen mit 8.

Es reicht vollkommen hin, diese kleine Gröfse mit 4 Decimalstellen zu berechnen:

$$\begin{aligned} log.\,3 &= 0{,}4771 \\ log.\,arc\,1'' &= 4{,}6856 \\ log.\,arc\,1' &= 6{,}4637 \\ log.\,log.\,e &= 9{,}6378 \\ \hline & 1{,}2642-10 \\ num. &= 0{,}0^{8}1018 \\ d.\,log.\,\varrho &= 0{,}0^{8}1018\,.\,(L-L')''. \end{aligned}$$

Für Berlin ist $(L-L')''=644''$ **nach 8.**

$$\begin{aligned} log.\,644 &= 2{,}8089 \\ log.\,0{,}0^{8}1018 &= 1{,}2642-10 \\ \hline log.\,d.\,log.\,\varrho &= 4{,}0731-10 \\ d.\,log.\,\varrho &= 0{,}00000\,11{,}84. \end{aligned}$$

Die Änderung des Logarithmus des Halbmessers der Krümmung für eine Minute, unter der Breite von Berlin.

14. Wir sehen, dafs die Änderungen des Krümmungshalbmessers in gleichem Verhältnifs stehen mit dem Winkel zwischen der Normal und dem Erdradius. Das maximum dieses Winkels: $L-L'$, tritt ein für $sin\,L=\sqrt{\frac{1}{2-\varepsilon^2}}$. Das ε^2 so angenommen, wie es die v. Müfflingsche Instruction bestimmt (7.), findet sich dies L nahe $=45^0\ 5'$. Dann wird

$$L-L'=\frac{\varepsilon^2}{2\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}=666''\ 3 \text{ in Secunden}$$

und wir erhalten durch eine Rechnung wie in 13. die gröfste Änderung des Meridian-Krümmungshalbmessers, für 1 Minute Breitenänderung,

$$=0{,}00000\ 12,25.$$

Er ändert sich sehr langsam um das maximum, und desto schneller, je weiter von diesem entfernt.

Die Instruction enthält zum Vortheil geodätischer Berechnungen eine eigne Hülfstafel der Änderungen der Krümmungshalbmesser, No. VIII; welche sich nach diesen Grundsätzen anfertigen läfst.

15. Bei der geringen Änderung des Halbmessers der Krümmung können wir ihn innerhalb der Grenzen eines Meridiangrades, welchen wir mit G bezeichnen wollen, sehr nahe als constant ansehen. Dann ist

$$\begin{aligned} G &= \varrho\,.\,arc\,1^0 \quad \text{sehr nahe} \\ &= \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\,sin\,L^2)^{\frac{3}{2}}}\,.\,arc\,1^0. \end{aligned}$$

Das Binomium: $(1-\varepsilon^2\,sin\,L^2)^{-\frac{3}{2}}$ entwickelt giebt die Reihe:

$$1+\frac{3}{2}\varepsilon^2\,sin\,L^2+\frac{3\,.\,5}{2\,.\,4}\varepsilon^4\,sin\,L^4+\frac{3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6}\varepsilon^6\,sin\,L^6+\ldots.$$

Das vierte Glied dieser Reihe erlangt seinen höchsten Werth für $\sin L = 1$. Setzen wir dann das ε^2 der Instruction, so wird das Glied $= 0{,}00000006 \ldots$. Multipliciren wir dieses mit a, und nehmen dieses an $= 6376000$ mètres, so giebt das Produkt beinahe: $0^m 4$. Bedeutend geringer aber ist der Fehler für G, wenn wir das erwähnte Glied ganz weglassen.

Wir können hiernach unbedenklich, die Reihe mit dem 3ten Gliede schliefsend setzen

$$\varrho = a(1-\varepsilon^2)\left[1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2 \sin L^2 + \frac{3.5}{2.4}\varepsilon^4 \sin L^4\right].$$

Verwandeln wir dann die Potenz von $\sin$ L in den Cosinus eines Vielfachen von L, so erhalten wir

$$\varrho = a(1-\varepsilon^2)\left[1 + A - B\cos 2L + C\cos 4L\right]$$

$$A = \frac{3}{4}\cdot\varepsilon^2 + \frac{3}{8}\cdot\frac{3.5}{2.4}\cdot\varepsilon^4$$

$$B = \frac{3}{4}\cdot\varepsilon^2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{3.5}{2.4}\cdot\varepsilon^4$$

$$C = \frac{1}{8}\cdot\frac{3.5}{2.4}\cdot\varepsilon^4.$$

Nach der Instruction ist $\log.\ \varepsilon^2 = 7{,}8089667$

$\log.\ \varepsilon^4 = 5{,}6179334.$

Hieraus erhalten wir:

$$A = 0{,}0048601$$
$$\log.\ A = 7{,}6866452;$$
$$B = 0{,}0049476$$
$$\log.\ B = 7{,}6943946;$$
$$C = 0{,}0000097$$
$$\log.\ C = 4{,}9878647.$$

Also $\varrho = a.\,0{,}9935523\,[1{,}0048601 - 0{,}0049476.\cos 2L + 0{,}0000097.\cos 4L].$

16. Setzen wir nun für a die dem ε^2 entsprechende Länge des Äquatorhalbmessers und für L die geographische Breite irgend eines Ortes, so giebt $\varrho\,arc\,1^\circ$, die Länge des Meridiangrades aus diesem Orte zur Hälfte südlich zur Hälfte nordlich genommen.

17. Wegen Kleinheit des C ist der Fehler noch geringe, den wir begehen, wenn wir in der Reihe für ϱ auch das dritte Glied: $C\cos 4L$, weglassen. Dann kommt:

$$G = arc.\,1^\circ.\,a(1-\varepsilon^2)\left[1 + A - B + 2B\sin L^2\right]$$

woraus sich zeigt, dafs die Änderungen der elliptischen Meridiangrade beinahe in dem Verhältnisse stehen des Quadrates des Sinus der Breite.

18. Legen wir in die sehr nahe genaue Reihe für ϱ (15.) wiederum die Potenzen der Sinus von L, so erhalten wir

$$G = arc.\,1^\circ.\,a(1-\varepsilon^2)\left[1 + A - B + C + (2B - 8C)\sin L^2 + 8C\sin L^4\right]$$

und es ist: $A - B + C = 0;$

$$2B - 8C = \frac{3}{2}\varepsilon^2$$

$$8\,C = \frac{3\,.\,5}{2\,.\,4}\,\varepsilon^4$$

daher:
$$G = \frac{a(1-\varepsilon^2)\,arc\,.\,1^0}{(1-\varepsilon^2 \sin L^2)^{\frac{3}{2}}}$$

sehr nahe, wodurch mithin die in 15. gemachte Voraussetzung, den Krümmungshalbmesser innerhalb der Grenzen eines Grades als constant ansehen zu dürfen, ihre Bestätigung erlangt.

19. Hieraus nun ergiebt sich das Mittel, mit hinreichender Genauigkeit aus zwei gemessenen Meridiangraden das ε^2, und die damit zusammenhängende Abplattung des Erdmeridianes zu finden.

Setzen wir nämlich die Grade G′, G, seien gegeben ($G' > G$), so haben wir:

$$G' = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin L'^2)^{\frac{3}{2}}}\,.\,arc\,.\,1^0$$

$$G = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin L^2)^{\frac{3}{2}}}\,.\,arc\,.\,1^0$$

und es kommt aus beider Vergleichung:

$$\varepsilon^2 = \frac{\left(\frac{G'}{G}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}{\left(\frac{G'}{G}\right)^{\frac{2}{3}} \sin L'^2 - \sin L^2}\,.$$

Die Gröſse $\frac{a-b}{a}$ heiſst die Abplattung des Meridians bezogen auf den Äquatorhalbmesser. Da nun $\frac{a^2-b^2}{a^2} = \varepsilon^2$, so ist, wenn wir die Abplattung $= \alpha$ setzen,

$$\alpha = 1 - \sqrt{(1-\varepsilon^2)}.$$

Um aber die Länge eines Meridiangrades zu bestimmen ist schon die Voraussetzung eines ε^2 nothwendig. Das Ermitteln eines ε^2 aus zwei Gradlängen ist daher ein Annäherungsverfahren.

20. Nehmen wir, statt *arc* 1°, oder irgend eines andern Bogens, das Differenzial dL, der geogr. Breite L, es uns als einen in Theilen des Halbmessers $=1$ ausgedruckten Bogens vorstellend, so ist

$$\varrho\,.\,dL$$

ein ganz genauer Ausdruck für das elliptische Augment eines elliptischen Meridianbogens von unbestimmter Winkelweite L, die wir von dem Äquator ab zählen, und daher jenes Augment von dem Endpunkte jenes Bogens nach Norden hin positiv setzen.

Unter diesen Annahmen ist

$$\int \varrho\,.\,dL$$

ein genauer Ausdruck für die Länge des erwähnten Meridianbogens in Maaſstheilen des ϱ.

21. Nach 15. ist also

$$\int \varrho\,.\,dL = a(1-\varepsilon^2)\left[(1+A)L - B\,.\int \cos 2L\,.\,dL + C\,.\int \cos 4L\,dL\right]$$
$$= a(1-\varepsilon^2)\left[(1+A)\,arc\,.\,L - \tfrac{1}{2}B\,.\,\sin 2L + \tfrac{1}{4}C \sin 4L\right]$$

die Länge des Meridianbogens von $L=0$ bis $L=L$.

Setzen wir diesen Bogen $=s$, und erweitern ihn nach Norden hin um den Bogen $\triangle s$, so ist

$$s+\triangle s=a(1-\varepsilon^2)\left[(1+A)\,arc.(L+\triangle L)-\tfrac{1}{2}B\sin 2(L+\triangle L)+\tfrac{1}{4}C\sin 4(L+\triangle L)\right].$$

Daraus kommt für den Bogen, welcher zwischen die Breiten fällt: L; $L+\triangle L$:

$$\triangle s=a(1-\varepsilon^2)\left[(1+A)\,arc.\triangle L-B\sin\triangle L\cos 2(L+\tfrac{1}{2}\triangle L)+\tfrac{1}{2}\sin 2.\triangle L.\cos 4(L+\tfrac{1}{2}\triangle L)\right].$$

Sei L' die Breite der Mitte der Winkelweite dieses Bogens, so ist $L=L'-\frac{1}{2}\triangle L$, also

$$\triangle s=a(1-\varepsilon^2)\left[(1+A)\,arc.\triangle L-B\sin\triangle L\cos 2L'+\tfrac{1}{2}C\sin 2.\triangle L\cos 4L'\right].$$

22. Wird das Integral $\int\varrho\,.dL$ von $L=0$ bis $L=90^\circ$ genommen, so erhalten wir den Meridianquadranten. Dieser: Q gesetzt, so ist

$$Q=a(1-\varepsilon^2)(1+A)\frac{\pi}{2}$$

Setzen wir $Q=10000000$ Mètres, so ist

$$a=\frac{10000000^m}{(1-\varepsilon^2)(1+A)\frac{\pi}{2}}.$$

23. Beschränken wir den Bogen $\triangle s$ auf die Länge eines Meridianbogens von 1° Winkelweite $=G$, so wird

$$G=a(1-\varepsilon^2)\left[(1+A)\,arc\,1^\circ-B\sin 1^\circ\cos 2L\right]$$

wo wir das dritte Glied der Reihe rechts ohne Fehler weglassen können. L ist hier die geographische Breite des Mittelpunktes der Winkelweite von G.

24. Mit dem ε^2 der Instruction ergiebt sich

$$(1+A)\,arc\,1^\circ=0{,}0175381147347\ldots.$$
$$B\sin 1^\circ=0{,}0000863474942\ldots.$$

und $$a(1-\varepsilon^2)=6335407^m2.$$

Hiernach ist also für jedes gegebne L, das entsprechende G leicht in Mètres zu berechnen, und dessen Länge, verglichen mit seiner gemessenen Länge, giebt das Verhältnifs des Mètres zu der, der Messung zum Grunde gelegten, Maafseinheit.

25. Die Länge des Meridianbogens von Dünkirchen bis Barcellona, gemessen von Delambre und Mechain ist in Toisen, für die Temperatur 16,25 des hunderttheiligen Thermometers $=551584{,}27$

Die geographische Breite der Mitte, L, $=46^\circ\,41'\,58''$; die entsprechende Winkelweite $=9^\circ6728$.

Die Länge des Meridianbogens von Pahtavara bis Mallorn im Schwedischen Lappland, gemessen von Suanberg, für die nämliche Temperatur,

$=92760{,}731$;

$L=66^\circ\,20'\,10''\,047$; Winkelweite $=1^\circ6221$.

Auf Längen von nicht gröfserer Winkelweite, als die eben angeführten, läfst sich eine gleichmäfsige Krümmung des Bogens, ohne merklichen Fehler, annehmen. Unter dieser Voraussetzung erhalten wir

die Länge eines Grades, für welchen $L = 46^0\ 41'\ 58''$,

$$G = \frac{551584^t27}{9,6728} = 57018^t412;$$

und die Länge des Grades, für welchen $L = 66^0\ 20'\ 10''\ 047$.

$$G' = \frac{92760^t731}{1,6221} = 57185^t581.$$

Nach den Daten in 19. berechnet, erhalten wir in Mètres

$$G = 111133^m89$$
$$G' = 111481^m54.$$

Vergleicht man diese in Mètres berechneten Längen eines Grades mit den in Toisen gemessenen, so ergiebt sich die Länge eines Mètres in Französischen Linien, (dem 144sten Theile des Pariser Fufses): $1^m = 443''\ 2$.

26. Aus den beiden gemessenen Gradlängen läfst sich nun auch, nach der Formel in 19. das ε^2 unmittelbar berechnen, wobei aber zu bemerken ist, dafs nach den bisherigen Erfahrungen jedes Paar Gradlängen ein anderes ε^2 giebt, so dafs sich mehrere verschiedene ε^2, daher auch Abplattungen des Erdmeridians, durch wirkliche Messungen rechtfertigen lassen. Auch ist nicht zu übersehen, dafs, wie sich weiterhin zeigen wird, selbst eine gemessene Gradlänge sich nicht bestimmen läfst, ohne dabei schon irgend eine Abplattung als gegeben voraus-zusetzen: daher die Ermittelung einer Abplattung aus zwei oder mehr Gradmessungen offenbar nur als ein Annäherungsverfahren erscheint.

Legen wir der Formel in 19. die Data in 25. unter, so erhalten wir:

$$\frac{G'}{G} = 1,0029314174 \ldots$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,0019533247 \ldots$$

$$\sin L' = 0,9159157 \ldots \quad \sin L'^2 = 0,83890164108 \ldots$$
$$\sin L = 0,7217535 \ldots \quad \sin L^2 = 0,52092811476 \ldots$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{\frac{2}{3}} \sin L'^2 = 0,84054038814 \ldots$$
$$\sin L^2 = 0,52092811476 \ldots$$
$$\text{diff.} = 0,31961227338 \ldots$$

Also, nach der Formel in 19.

$$\varepsilon^2 = \frac{19533247 \ldots}{3196122734 \ldots} = 0,006111544 \ldots$$
$$1 - \varepsilon^2 = 0,993888456 \ldots$$
$$\sqrt{(1-\varepsilon^2)} = 0,996939544 \ldots$$

die Abplattung:

$$\alpha = 1 - \sqrt{(1-\varepsilon^2)} = 0,003060456 \ldots$$
$$= \frac{1}{326,74}.$$

27. Das von 1. bis 26. vorgetragne umfaſst die Theorie des Erdmeridians in allen ihren wesentlichsten Punkten. Wir gehen nun über zur Betrachtung der Erdoberfläche, nach der in 1. aufgestellten Hypothese.

28. Denken wir uns die Umwälzung einer Ellipse, deren Gleichung die obige:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

um ihre kleine Hauptaxe als vollendet. Entwerfen wir in ihre Ebene eine kleinere ihr ähnliche Ellipse um denselben Mittelpunkt, deren Hauptaxen also mit denen der gröſseren erzeugenden zusammenfallen, errichten auf jedem Punkte des Umfanges dieser kleineren ein Perpendikel $=z$ auf der Ebene, so werden, wenn die Endpunkte dieser Perpendikel in die durch die Umwälzung entstandne Oberfläche (Sphäroid) fallen, dieselben in ihrer Gesammtheit eine Ellipse bilden, deren Hauptaxen:

die gröſsere, der a parallele, $= \sqrt{(a^2 - z^2)}$

die kleinere, der b parallele, $= \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - z^2)}$.

Geben wir nun dem z alle möglichen Werthe, von $z=0$ bis $z=+a$ und von $z=0$ bis $z=-a$, so erhalten wir eben so viel, der erzeugenden ähnliche, Ellipsen, die in ihrer Continuität die Oberfläche, des Sphäroid selbst, darstellen.

Die allgemeine Gleichung für jene Ellipsen aber ist

$$a^2y^2 + b^2x^2 = b^2(a^2 - z^2)$$

Alles dieses ergiebt sich aus den gemachten Voraussetzungen unmittelbar.

Folglich ist die Gleichung eines durch Umwälzung der Ellipse (x, y) um ihre kleinere Hauptaxe entstandenen Sphäroids,

$$= a^2y^2 + b^2(x^2 + z^2) = a^2b^2.$$

Hieraus läſst sich bilden:

die Gleichung: $a^2y^2 + b^2z^2 = b^2(a^2 - x^2)$

welche auf die Gleichung: $ay^2 + b^2z^2 = a^2b^2$,

und die Gleichung: $b^2(x^2 + z^2) = a^2(b^2 - y^2)$

welche auf die Gleichung: $x^2 + z^2 = a^2$,

ganz in derselben Beziehung steht, als die zuerst aufgestellte auf die Gleichung der erzeugenden. Wobei nur von dieser zu bemerken ist, daſs sie die eines Kreises ist, wie es nicht anders sein kann, da alle auf der Umdrehungsaxe senkrechte Ebenen, auf der Oberfläche des Sphäroids Kreise zum Durchschnitt haben müssen.

29. Schneide das Sphäroid eine gegen die angenomne Ebene der xy um den Winkel ω geneigte Ebene. Ihr Durchschnitt mit der Ebene der xy mache mit der Axe der x, den Winkel L. Diese Durchschnittslinie sei die Axe der ξ für den auf der Erdoberfläche durch jene Ebene gemachten Schnitt. Auf der Axe der ξ stehe senkrecht die Axe der η in der schneidenden Ebene, und der Anfang bei der Coordinaten falle in den Durchschnitts-Punkt der Axen der ξ und der x dessen Entfernung vom Mittelpunkt $=f$ sei, so erhalten wir für den Durchschnitt der schneidenden Ebene mit der Oberfläche des Sphäroids:

$$x = f + \cos L . \xi + \cos\omega . \sin L . \eta$$
$$y = \sin L . \xi - \cos\omega . \cos L . \eta$$
$$z = \sin\omega . \eta.$$

Daraus aber für die Oberfläche des Sphäroids, nach 28. wenn wir blos a und b als Constante betrachten:

$$(a^2 \sin L^2 + b^2 \cos L^2)\xi^2 + [a^2 \cos\omega^2 \cos L^2 + b^2(\cos\omega^2 \sin L^2 + \sin\omega^2)]\eta^2$$
$$- 2\cos\omega \sin L \cos L (a^2 - b^2)\eta . \xi + 2b^2 f \cos L . \xi + 2b^2 f \cos\omega \sin L . \eta$$
$$= b^2(a^2 - f^2)$$

Setzen wir in dieser Gleichung ε^2 statt $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$, so wird sie:

$$(1 - \varepsilon^2 \cos L^2)\xi^2 + (1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \cos\omega^2 \cos L^2)\eta^2 - 2\varepsilon^2 \cos\omega \sin L \cos L . \eta\xi$$
$$+ 2(1 - \varepsilon^2)\, f[\cos L . \xi + \cos\omega \sin L . \eta]$$
$$= (1 - \varepsilon^2)(a^2 - f^2)$$

30. Schreiben wir die in 29. erhaltene Gleichung, der Kürze wegen:

$$A\xi^2 + B\eta^2 - 2C . \xi\eta + D\xi + E\eta = F,$$

und leiten daraus her den Krümmungshalbmesser des durch sie dargestellten elliptischen Schnitts, nach der Formel:

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}, \text{ nach 6.}$$

Durch Differenziirung erhalten wir aus ihr:

$$2A\xi d\xi + 2B\eta d\eta - 2C\eta d\xi - 2C\xi d\eta + Dd\xi + Ed\eta = 0,$$
$$2A\xi d^2\xi + 2Ad\xi^2 + 2Bd\eta^2 - 4Cd\xi d\eta - 2C\eta d^2\xi + Dd^2\eta = 0$$

daraus

$$\frac{d^2\xi}{d\eta^2}(2A\xi - 2C\eta + D) + \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2 . 2A + \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)C + 2B = 0.$$

Da aber die ganz allgemeine Darstellung des Krümmungshalbmessers auf diesem Wege einen sehr zusammengesetzten, für die Anwendung wenig geeigneten Ausdruck giebt, so beschränken wir uns auf einen bestimmten Fall.

Wir setzen nämlich voraus, dafs die Axe der ξ eine solche Lage hat, dafs sie, auf der positiven Seite, auf der Curve (da wo diese die Ellipse, x, y, schneidet), normal stehe, so ist, für diesen Punkt, $\frac{d\xi}{d\eta} = 0$.

Dann aber ist die Axe der η parallel einer geraden, welche in dem Durchschnittspunkt der Axe der ξ und der Curve diese berührt; folglich sind alle η der Curve auf der positiven und negativen Seite einander gleich. Hieraus aber folgt aus der oben aufgestellten Gleichung der Curve die Bedingung

$$-2C\xi + E = 0$$

wodurch ξ den bestimmten Werth erlangt:

$$\xi = \frac{E}{2C}.$$

Nun verwandelt sich obige Differenzialgleichung zweiter Ordnung, gesetzt $\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right) = 0$, in

$$\frac{d^2\xi}{d\eta^2}(2A\xi - 2C\eta + D) + 2B = 0$$

Setzen wir in diese den oben bestimmten Werth von ξ, und $\eta = 0$, wodurch wir sie auf den Endpunkt der Axe der ξ als Normale der Curve beschränken, so kommt:

$$\frac{d^2\xi}{d\eta^2} = -\frac{2B}{\frac{AE}{C} + D}.$$

Woraus, sofort:

$$\varrho = -\frac{\frac{AE}{C} + D}{2B}.$$

In diesem Ausdruck ist

$$A = 1 - \varepsilon^2 \cos L^2;\ E = 2(1 - \varepsilon^2)\ f \sin L \cos\omega;\ C = \varepsilon^2 \sin L \cos L \cos\omega;$$

also $$\frac{AE}{C} = 2\left[(1 - \varepsilon^2 \cos L^2)\frac{(1-\varepsilon^2)f}{\varepsilon^2 \cos L}\right] = 2.\frac{(1-\varepsilon^2)f - (1-\varepsilon^2)\varepsilon^2 f \cos L^2}{\varepsilon^2 \cos L}$$

$$D = 2(1-\varepsilon^2) f \cos L = 2.\frac{(1-\varepsilon^2)\varepsilon^2 f \cos L^2}{\varepsilon^2 \cos L}$$

$$\frac{AE}{C} + D = \frac{2(1-\varepsilon^2)f}{\varepsilon^2 \cos L}.$$

Es ist aber $$f = \varepsilon^2 x = \frac{a\varepsilon^2 \cos L}{(1 - \varepsilon^2 \sin L^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots 4.a.$$

Daher $$\frac{AE}{C} + D = \frac{2a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin L^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Hieraus folgt

$$\varrho = -\frac{\frac{AE}{C} + D}{2B} = +\frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin L^2)^{\frac{1}{2}}\,[1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \cos L^2 \cos\omega^2]}$$

wo wir, wegen der Zweideutigkeit des Vorzeichens des Nenners + statt — setzen dürfen.

L ist hier die geographische Breite des Ortes, durch welchen wir die Normal gezogen annehmen; ω, als spitzer Winkel das Azimuth der durch den Ort gelegten Curve. Setzen wir ihn $= 0$, so erhalten wir

$$\varrho = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin L^2)^{\frac{3}{2}}}$$

den vorhin schon gefundenen Krümmungshalbmesser des Meridians. Setzen wir $\omega = 90^0$, so wird

$$\varrho = \frac{a}{(1-\varepsilon^2 \sin L^2)^{\frac{1}{2}}}$$

der Krümmungshalbmesser eines auf dem Meridian senkrecht stehenden Schnitts. Und es fällt in die Augen, daſs er unter allen für einen gegebenen Punkt des Sphäroids zu ziehen möglichen Halbmessern der Krümmung der gröſste, mithin der ihm entsprechende Bogen der flachste ist. Auch ist er, wie die Formel 5.g darthut, dieselbe Linie, welche normal auf dem gegebenen Punkt vom Meridian und von der Umdrehungsaxe begrenzet wird.

Übrigens leuchtet aus der Herleitung von selbst ein, daſs die in den Meridian eines Orts fallende Normale nicht blos auf dem Meridian, sondern auf der Oberfläche selbst des Sphäroids senkrecht steht, und alle für denselben Punkt möglichen Krümmungshalbmesser in dieselbe Linie fallen.

31. Für Berlin ergiebt sich ganz leicht aus der Rechnung in 9, für diesen gröſsten Krümmungshalbmesser

$$log.\ \varrho = 6{,}2295865$$

für den Kleinsten haben wir in 9.

$$log.\ \varrho = 6{,}2285424.$$

Da dieser Unterschied noch nicht $\frac{1}{400}$ des Ganzen beträgt, so wird es für kleine Bogen nicht erfoderlich jedesmal den genauen Werth von ϱ zu berechnen, welches oft sehr schwierig werden kann, sondern hinreichen, aus dem Gröſsten und Kleinsten für einen gegeben Azimuthwinkel ω, nach Verhältniſs desselben den betreffenden Werth zu bestimmen.

Daher auch die Instruction unter ihren Hülfstafeln, auſser einer für die Meridianhalbmesser, nur noch eine für die Halbmesser der darauf senkrechten Bogen hat, welche also nach obiger Formel berechnet werden kann.

Was endlich die Veränderung des gröſsten Krümmungshalbmessers, so weit sie von den Änderungen der Breite abhängt betrifft, so zeigt eine geringe Aufmerksamkeit auf das gesagte und auf die in 13. gegebene Rechnung, daſs die Änderungen des gröſsten jederzeit ein Drittel sind der Änderungen des kleinsten.

32. Es ist nun noch der Berechnung von Erdzonen und einer ganzen Hemisphäre zu erwähnen.

Sei für die Breite L, der kleinste Krümmungshalbmesser $= \varrho$, der gröſste $= \varrho'$, so ist das Differenzial einer Zone

$$2\pi\varrho\,.\,\varrho'\,cos\,L\,.\,dL$$

$$= \frac{2\pi a^2(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\,sin\,L^2)^2}\,cos\,L\,.\,dL$$

$$= 2\pi a^2(1-\varepsilon^2)\,[d\,.\,sin\,L + 2\varepsilon^2 sin\,L^2\,.\,d\,.\,sin\,L + 3\varepsilon^4 sin\,L^4\,.\,d\,.\,sin\,L + \ldots\ldots]$$

Das Integral hievon, von L=0 bis L=L, eine zwischen dem Äquator und dem Parallelkreise der Breite L begrenzten Zone, ist offenbar

$$= 2\pi a^2(1-\varepsilon^2)\,[sin\,L + \tfrac{2}{3}\varepsilon^2 sin\,L^3 + \tfrac{3}{5}\varepsilon^4 sin\,L^5 + \ldots\ldots]$$

wonach denn leicht jede zwischen zwei Parallelkreise fallende Zone zu bestimmen ist.

Die Hemisphäre giebt diese Gleichung für $L = 90^0$,

$$= 2\pi a^2(1-\varepsilon^2)\,[1 + \tfrac{2}{3}\varepsilon^2 + \tfrac{3}{5}\varepsilon^4 + \ldots\ldots].$$

Cap. III.

Geodätische Ortsbestimmungen.

1. Ein System von Signalpunkten auf der Oberfläche der Erde bildet ein geodätisches Dreiecknetz. Obgleich sich, wegen der sphäroidischen Gestalt der Oberfläche zwischen zwei Signalpunkten eine auf ihr vertikale Ebene in wissenschaftlichem Sinn nicht legen läfst, so wird dies doch auf so kurze Entfernungen, als die zweier Signalpunkte von einander, nahe bei möglich sein. Verlegen wir nun die Signalpunkte in einerlei Horizontal-Oberfläche und, durch je zwei derselben, Vertikalebenen, so werden die Durchschnitte der letzteren mit jener krummlinigte Dreiecke bilden. Es ist aber leicht einzusehen, dafs in denselben Fällen, wo wir sphärische Dreiecke, nach Anleitung des ersten Capitels als geradlinigte behandeln dürfen, um so mehr die erwähnten krummlinigten Dreiecke für sphärische genommen werden können.

Die Sehelinien von einem Signalpunkte zum andern, in der horizontalen Erdoberfläche bilden die sphärischen Winkel jener Dreiecke.

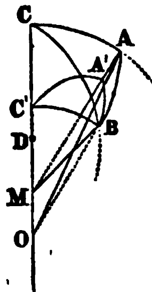
Ist also in einem geodätischen Dreiecknetz eine der Seiten (die Basis) gemessen; sind alle Winkel der Dreiecke beobachtet, so läfst sich leicht, nach Regeln der sphärischen Trigonometrie jede Seite des Dreiecks berechnen. Daher ein solches Netz immer als durchaus bestimmt zu betrachten ist.

2. Wenn nun noch überdies für irgend einen Signalpunkt des Dreiecknetzes, dessen geographische Breite, Länge und das Azimuth des von ihm nach einem zweiten Signalpunkt auf die angegebne Weise gezognen horizontalen Bogens astronomisch bestimmt worden sind, so läfst sich daraus Breite, Länge und Azimuth für jeden andern Signalpunkt, des Netzes durch Berechnung finden. Dies aber ist es, was wir mit dem Namen einer geodätischen Ortsbestimmung bezeichnen.

Aus der geodätischen Breitenbestimmung zweier Signalpunkte des Netzes ergiebt sich wiederum ihr Parallelenunterschied, und aus der Summirung dieser Parallelenunterschiede die Länge des Meridianbogens zwischen den äufsersten nach Norden und Süden fallenden Punkten.

Wir wollen also nun zeigen, wie die Orte der Punkte eines geodätischen Dreiecknetzes sich auf dem Grunde der in Cap. II. vorangeschickten Theorie der sphäroidischen Gestalt der Erde bestimmen lassen?

3.



Sei AB die Seite eines geodätischen Dreiecks, gemessen,

$$AB = \Delta$$

Die Breite des Punktes B sei durch Beobachtung gefunden,

$$= L$$

Angenommen A liege nördlicher als B, und seine geographische Breite sei $= L'$.

Ferner sei für den Punkt B das Azimuth der Seite BA gegeben, mithin auch der Winkel dieser Seite mit dem Meridian durch B, den wir als einen spitzen zum Grunde legen wollen.

Sei C der Nordpol der Erde, und CB, CA, Erdmeridiane durch B und A. Also gegeben:

$$\angle CBA = \varphi.$$

Aufgabe:

Aus Δ, L und φ soll L' gefunden werden.

Auflösung:

Falle CO in die Umdrehungsaxe; BM sei eine Normale auf B, mithin der gröſste Krümmungshalbmesser für B. Wir verbinden AM, beschreiben mit BM die Kreisbogen: BC' in der Meridianebene das B; C'A' in der Meridianebene das A; A'B in der Ebene des Bogens AB, und diesem nahe gleich (1. 11).

Weil BM, als Normale des Sphäroids, sowohl auf dem elliptischen Bogen BC als auf dem BA senkrecht steht, ebenso auf BC' und BA', als deren Radius, so ist der sphärische Winkel C'BA' dem sphäroidischen CBA gleich; mithin:

$$\angle C'BA' = \varphi;$$

Die Länge Δ läſst sich in einen dem Halbmesser BM entsprechenden Bogen: δ, verwandeln, wenn wir setzen:

$$\delta = \frac{\Delta}{BM} = \frac{\Delta}{a}\left[1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin L^2\right]$$

Der dem sphärischen Bogen CB entsprechende Winkel ist offenbar

$$= 90^\circ - L.$$

C'A' läſst sich durch sphärische Trigonometrie berechnen, aus: δ, φ; $90^\circ - L$. Dadurch also ist gefunden: $\angle CMA$.

Es ist aber, wenn wir AO ziehen, normal auf A und die Umdrehungsaxe in O treffend, und den kleinen Winkel MAO mit ψ bezeichnen,

$$\angle COA = 90^\circ - L' = C'A' - \psi$$

$$L' = 90^\circ - C'A' + \psi.$$

Und da ψ in dem geradlinigten Dreieck liegt MAO, so ist

$$MO : \psi = AO : \sin C'A', \quad \text{oder, annäherungsweise,}$$

$$MO : \psi = BM : \sin C'A'$$

$$\psi = \frac{MO : \sin C'A'}{BM.}$$

Hierin ist $C'A'$ durch das sphärische Dreieck, BM durch L, gegeben und MO kann annäherungsweise bestimmt werden: ψ wird daher so nahe man will gefunden, und aus diesem und dem $C'A'$ erhalten wir mit L' die Auflösung.

Formeln zur Berechnung.

1. Es ist:

$$\delta = \frac{\Delta}{a}\left[1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin L^2\right].$$

Nach Cap. II. 4. g. ist nämlich: $BM = \frac{a}{(1-\varepsilon^2 \sin L^2)^{\frac{1}{2}}} = a\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin L^2\right)$ woraus sich diese Formel sogleich ergiebt.

2. Es ist:

$$\cos C'A' = \sin L \cos\delta + \cos L \sin\delta \cos\varphi, \quad \text{nach sphär. Trigon.}$$
$$= \sin L[\cos\delta + \cot L \sin\delta \cos\varphi]$$

also gesetzt: $\cot L . \cos\varphi = \cot u$, so ist

$$\cos C'A' = \frac{\sin L}{\sin u}\sin(u+\delta).$$

Es kommt alles darauf an, hieraus $C'A'$ sehr scharf zu berechnen.

3. Die Länge der Normalen von B, A, vom Äquatorhalbmesser bis zur Umdrehungsaxe, ist

$$= \frac{a\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2 \sin L^2)} = a\varepsilon^2[1+\varepsilon^2 \sin L^2] \text{ für B}; = a\varepsilon^2[1+\varepsilon^2 \sin L'^2] \text{ für A.}$$

Daher ist $DO = a\varepsilon^2 \sin L'[1+\varepsilon^2 \sin L'^2]$

$DM = a\varepsilon^2 \sin L[1+\varepsilon^2 \sin L^2]$, wenn D der Mittelpunkt des Sphäroids:

mithin ist: $DO - DM = OM = a\varepsilon^2[\sin L' - \sin L]$

wenn wir die Gröſsen von der Ordnung ε^4 u. s. w. bei Seite setzen.

Der vorhin gegebene Ausdruck für ψ, verwandelt sich also, diesen Werth von OM dort untergelegt, in

$$\psi = \varepsilon^2[\sin L' - \sin L]\sin C'A'.$$

Sei nun $L' = L + \Delta L$, wo ΔL, für zwei einander zunächst liegende Signalpunkte, jederzeit klein genug sein wird, daſs wir, ohne merklichen Fehler in ψ werden setzen dürfen

$$\sin L' = \sin L + \Delta L \cos L: \text{ so kommt:}$$
$$\psi = \varepsilon^2 . \Delta L . \cos L . \sin C'A'$$

wodurch wir ψ in derselben Einheit, wie ΔL erhalten.

Daraus ergiebt sich denn

4. $L' = 90^\circ - C'A' + \varepsilon^2 \cos L . \sin C'A' . \Delta L.$

Diese Formel läſst sich nur annäherungsweise berechnen. Wir setzen nämlich zuerst $L' = 90^\circ - C'A'$, woraus wir ein angenähertes ΔL erhalten, u. s. w. fort; wodurch, wenn nur $C'A'$ genau ist, auch L' so genau erhalten wird, als man will.

In zwei besonderen Fällen wird die Formel sofort genau, ohne Annäherung, wenn

nämlich $\varphi = 0$; dies ist es, wenn der Punkt A mit dem B unter einerlei Meridiane liegt. Ist dann A nördlich von B, so ist

$$\cos C'A' = \sin(L + \delta)$$
$$C'A' = 90^0 - L - \delta$$

daher
$$L' = L + \delta + \varepsilon^2 \cos L \cos(L + \delta) \,.\, \delta;$$

auf ähnliche Weise ist, wenn A südlich liegt von B,

$$L' = L - \delta - \varepsilon^2 \cos L \cos(L - \delta)\delta.$$

Steht BA senkrecht in B auf dem Meridian, so wird $\cos\varphi = 0$

$$\cos . C'A' = \sin L \cos\delta.$$

Berechnung.

Das Beispiel dazu nehme ich aus der von Müfflingschen Instruction. Es ist dort das Dreieck: Nordpol, Sternwarte Seeberg, Sternwarte Manheim, berechnet. Wir entlehnen daraus die Data, verlassen aber die dort angewendete Berechnungsmethode, deren Erklärung aus den vorhin aufgestellten Principien der mündlichen Belehrung vorbehalten bleiben kann, und gehen den hier vorgeschriebenen Gang, weil er directer zum Ziele führt.

B sei der Ort der Sternwarte von Manheim.
L ihre geographische Breite, $= 49^0\ 29'\ 12''\ 93$.
φ sei $= 44^0\ 18'\ 2''\ 10$
$\log . \sin \triangle = 4{,}78265889$, in Pr. Ruthen.

1. Wir verwandeln $\sin\triangle$ in $arc . \triangle$, nach I. 20. 2.

$$\log . \sin \triangle = 4{,}78265.$$

$\log . M = 4{,}47020$, entnommen aus der Hülfstafel der Instruction, oder berechnet nach der Formel $M = \varrho . arc 1^0$ .... II. 9.

$$\log . \frac{\sin\triangle}{M} = 0{,}31245$$
$$\log . \left(\frac{\sin\triangle}{M}\right)^2 = 0{,}62490$$

zu addiren $\quad 5{,}34321$ nach I. 20. 2.
$\qquad\qquad 5{,}96811$

$$\log . \left(\frac{\triangle}{\sin\triangle}\right) = 0{,}000092921$$
$$\log . \sin\triangle = 4{,}78265889$$
$$\log . \triangle = 4{,}78275181$$

$\log . a = 6{,}2287039$ in Pr. R., nach der Instruction

$$\log . \frac{\triangle}{a} = 8{,}5540479.$$

2. Elliptische Correction des gefundenen $\frac{\triangle}{a}$, d. h. Verwandelung in δ.

$$\log.\ \varepsilon^2 = 7{,}80896$$
$$\log.\ \sin L^2 = 9{,}76186$$
$$7{,}57082$$
$$\log.\ \frac{\Delta}{a} = 8{,}55405$$
$$6{,}12487$$
$$num = 0{,}00013331$$
$$\tfrac{1}{2}\frac{\Delta}{a}.\ \varepsilon^2 \sin L^2 = 0{,}00006665, \quad \text{elliptische Correction,}$$
$$\frac{\Delta}{a} = 0{,}035813$$
$$\delta = 0{,}035746$$
$$\log.\ \delta = 8{,}5532274$$
$$\log.\ arc\ 1'' = 4{,}6855749$$
$$3{,}8676525 \quad \text{in Secunden}$$
$$\delta = 7373''\ 1 = 2^\circ\ 2'\ 53''\ 1.$$

3. **Berechnung des Hülfswinkels u für** *cos* **C'A'.**

$$\log.\ \cos \varphi = 9{,}8547223$$
$$\log.\ \cot L = 9{,}9316988$$
$$\log.\ \cot u = 9{,}7864211$$
$$u = 58^\circ\ 33'\ 9''\ 9$$
$$\log.\ \sin u = 9{,}9310104.$$

4. **Berechnung des Winkels: C'A'.**

$$u = 58^\circ\ 33'\ 9''\ 9$$
$$\delta = 2\quad 2\ 53\ 5$$
$$u + \delta = 60\quad 36\quad 3{,}\ 4$$
$$\log.\ \sin (u+\delta) = 9{,}9401288$$
$$\log.\ \sin L = 9{,}8809607$$
$$9{,}8210895$$
$$\log.\ \sin u = 9{,}9310104$$
$$\log.\ \cos C'A' = 9{,}8900791$$
$$C'A' = 39^\circ\ 4'\ 35''.$$

5. **Berechnung der Breite L'.**

a) angenähert ist $L' = 90^\circ - 39^\circ\ 4'\ 8''07$
$$= 50^\circ\ 55'\ 51''\ 93$$
$$L = 49\quad 29\quad 12{,}\ 93$$
$$\Delta L = 1^\circ\ 26'\ 39''\ 0 = 5199''$$
$$\log.\ \Delta L = 3{,}71592 \text{ in Secunden.}$$

b) zur Correction des angenäherten L′

$$\begin{aligned} log.\ \varepsilon^2 &= 7{,}80896 \\ log.\ sin\ C'A' &= 9{,}79949 \\ log.\ cos\ L &= 9{,}81266 \\ \hline & \ 7{,}42111 \\ log.\ \triangle L &= 3{,}71592 \\ \hline log.\ \psi &= 1{,}13703 \end{aligned}$$

Correction $= + 13''\ 71.$

c) angenähert: $L' = 50^{0}\ 55'\ 51''\ 93$

Correction $= \quad\quad 13\ \ 71$

$L' = 50^{0}\ 56'\ \ 5''\ 64.$

Die Instruction findet durch eine doppelte Berechnung

$L' = 50^{0}\ 56'\ \ 5''\ 38.$

Übrigens fällt in die Augen, daſs eine zweite Annäherung keine Secunde ändern würde.

4. Sei wiederum C der Nordpol; CM die Umdrehungsaxe; B′A, die geodätische Linie $= \delta$; B′C′A′, das mit B′M beschriebene sphärische Dreieck; L′ ∠ L; alles übrige, wie in der Figur 3.

Mit der Sehne B′A beschreiben wir die Kreisbogen: B′A in der Ebene B′MA; B′C in der Ebene B′OA; CA in der Meridianebene des A. Das dadurch entstehende sphärische Dreieck BAC haben wir besonders abgebildet, und dessen Seiten mit a, b, c, bezeichnet.

Aufgabe.

Aus L; φ und δ, das sphäroid. Azimuth bei A und den Längenunterschied: λ, der Punkte: B′ und A zu finden.

Auflösung.

1. In dem sphärischen Dreiecke C′B′A′ ist gegeben: L; δ; φ. Daraus findet sich, nach I. 8, der Winkel C′ und der Winkel A′. C′ aber ist $=$ C, in CB′A, weil CM sowohl in C auf der Erdoberfläche, als auf den Bogen C′B′, C′A′, senkrecht steht. Es ist aber $C = \lambda$, mithin λ ohne weiteres gefunden.

2. In dem sphärischen Dreiecke B′AC ist, vermöge der Construction: $AC = \psi = b$; $B'C = 90^{0} - \frac{1}{2}\,\delta = a$. Der Winkel CAB′, in dem sphäroidischen Dreieck, ist, wenn wir das gesuchte Azimuth mit A′ bezeichnen $= 180^{0} - A'$. Dies aber ist der Ebenenwinkel der Ebenen B′AO und der Meridianebene von A. Weil aber die Bogen B′C, CA, in diesen Ebenen senkrecht auf beider Durchschnitt stehen, so ist auch der Winkel $180^{0} -$ B′CA gleich jenem Ebenenwinkel; mithin, in dem Dreiecke BAC, $C = A'$. Es steht aber der beschreibende Radius AA senkrecht, sowohl auf C′A′ und B′A′, als auf BA und CA; folglich ist der Winkel A in dem Dreieck BAC gleich dem A′ in dem C′A′B′, d. h. gleich dem sphärischen Azimuthe des δ bei A′.

In dem gegebenen sphärischen Dreiecke BAC ist sowohl das sphäroidische Azimuth $=A'=C$, als das sphärische $=A$ enthalten; mithin wird durch dessen Auflösung dieses aus jenem gefunden.

Formeln zur Berechnung.

1. Die Formeln zur Bestimmung von A und λ sind 1. 8 gegeben.

2. Es ist:

$$b=\psi;\ \sin b=\psi;\ \cos b=1-\tfrac{1}{2}\psi^2;$$

$$a=90^0-\tfrac{1}{2}\delta;\ \sin a=\cos\tfrac{1}{2}\delta=1;\ \cos a=\tfrac{1}{2}\delta.$$

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$
$$=(1-\tfrac{1}{2}\psi^2)\cos c+\psi\sin c\cos A$$
$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.$$

Daraus

$$\cos a=(1-\tfrac{1}{2}\psi^2)^2\cos a+\psi\cos C+\psi\sin c.\cos A$$
$$=\cos a-\psi^2\cos a+\psi[\cos C+\sin C\cot A]$$
$$o=-\psi\cos a+\cos C+\sin C\cot A$$
$$=-\frac{\psi\delta}{2}\sin A+\sin(C+A).$$

Setzen wir: $A=180^0-\mu$, also: $C+A=180^0+(C-\mu)$ so ist C sehr nahe $=\mu$;

$$\sin A.\frac{\psi\delta}{2}=-\sin(C-\mu)$$

$$-C=-\mu+\frac{\sin A.\psi\delta}{2}=-180^0+A+\frac{\sin A.\psi.\delta}{2}$$

$$180^0-C=A+\frac{\sin A.\psi.\delta}{2}.$$

Daraus:

$$C=A'=180^0-A-\frac{\sin A.\psi.\delta}{2}.$$

Es ist also $\frac{\sin A.\psi.\delta}{2}$ die sphäroidische Correction des sphärischen A.

Berechnung.

Die data entnehmen wir aus der vorigen Nummer und setzen daher in den Formeln I. 8.

$$\beta=L=49^0\ 29'\ 12''\ 93$$
$$a=\delta=\ 2\ \ 2\ \ 53,5$$
$$CB'A=\varphi=44\ \ 18\ \ \ 2,10$$

Daraus:

$\frac{\beta-a}{2}=23^0\ 43'\ 9''\ 71$	
$\frac{\beta-a}{2}=25\ \ 46\ \ 3,21$	$\log.\ tg\tfrac{1}{2}\alpha=9,6096803.$
$45^0+\frac{a-\beta}{2}=21\ \ 16\ \ 50,29$	
$45^0-\frac{a+\beta}{2}=19\ \ 13\ \ 56,70$	

Dann:

$log. tg \frac{1}{2}(\alpha+\lambda) = 9,6517852$; $\frac{1}{2}(\alpha+\lambda) = 24^\circ\ 9'\ 26''\ 49$

$log. tg \frac{1}{2}(\alpha-\lambda) = 9,6039503$; $\frac{1}{2}(\alpha-\lambda) = 21\ 53\ 15,\ 14$

$\lambda = 2\ 16\ 11,\ 25$

Die Instruction berechnet $\lambda = 2\ 16\ 11,\ 19$

$\alpha = A = 46\ 2\ 41,\ 63$

Das sphärische Azimuth $= 180^\circ - A = 133\ 57\ 18,\ 37.$

Ferner zur Berechnung der Correction:

$log. sin\ A = 9,85725$

$log. \psi = 1,13703$ in Sekunden

$log. \delta = 8,55323$ in Theilen des radius $= 1$

$9,54751$

correct. ellipt. $= \frac{0''\ 3528}{2} = 0''\ 1764$

$A' = 133^\circ\ 57'\ 18''\ 37$

$-\ 0''\ 176$

$= 133\ 57\ 18''\ 19$

Die Instruction hat 133 57 18, 26.

5. Den Parallelenunterschied zweier Punkte A, B, des Dreiecknetzes zu berechnen.

Auflösung.

Aus den Breiten: L′, L ergiebt sich deren Unterschied und zugleich der Krümmungshalbmesser $= \varrho$, der Mitte dieses Unterschiedes. Dieser nun mit ϱ multiplicirt giebt den gefoderten Parallelenunterschied in der Maafseinheit des ϱ.

Berechnung.

In dem vorliegenden Falle ist

$L' = 50^\circ\ 56'\ 5''\ 68$

$L = 49\ 29\ 12\ 93$

$L' - L = 1\ 26\ 52,75 = 5212''\ 75$

$log. (L' - L) = 3,7170627$

$log. arc\ 1'' = 4,6855749$

$log. \varrho = 6,2283801$ nach der Hülfstafel VIII der Instruction

$4,6310177$

Der Parallelenunterschied $= 42758^R029$ in Pr. Ruthen.

Cap. IV.

Theorie der kürzesten Linie im Allgemeinen und in besonderer Hinsicht der Ortsentfernungen auf der Erdoberfläche.

1. Sei $y = f(x)$, so erhalten wir daraus nach den Regeln der Differenzialrechnung:

$$dy = [f(x + dx) - fx]$$

und $\frac{dy}{dx}$ ist dann eine Function von x, welche aus der gegebenen Gleichung: $y = f(x)$ sich entwickelt.

Nehmen wir nun an, δy und δx, seien, eben wie dy und dx Differenziale von y und x; was aber das Verhältniſs $\frac{\delta y}{\delta x}$ betrifft, so sei es von der Gleichung $y = f(x)$ unabhängig, an irgend eine auſserhalb derselben liegande Bedingung geknüpft.

Setzen wir nun

$$\delta y = [f(x + \delta x) - fx]:$$

so ist diese Gleichung an sich selbst ganz unbestimmt. Wir können aber, sie mit andern von gleicher Natur zusammenstellend die unbestimmten Gröſsen: δy, δx, eliminiren, und so Bestimmungen für y; $f(x)$; erlangen, welche den gegebenen Gleichungen Genüge leisten.

Übrigens ist die Bildung dieser Gröſsen, da sie wirkliche Differenziale, wie dy, dx, sein sollen, nur von anderer Art, ganz den Regeln des Differenziirens unterworfen; mit dem Unterschiede, daſs δ statt d gesetzet wird. Man bezeichnet daher auch das Differenziiren nach δ mit einem eignen Worte: Variiren.

2. Hiernach bekommen wir:

$$d.\delta y = [f(x + dx) + \delta x + d\delta x - f(x + dx)] \\ - f(x + \delta x) + f(x).$$

$$\delta.dy = [f(x + \delta x) + dx + \delta dx - f(x + \delta x)] \\ - f(x + dx) + f(x).$$

Da wir nun dx jederzeit, bei den weiter fortgesetzten Differenziirungen als constant betrachten können, so ist dies aus demselben Grunde auch bei δx zulässig. Dann aber ist δdx und $d\delta x, = 0$. Und es folgt so, aus den beiden Gleichungen:

$$\delta.dy = d.\delta y.$$

3. Sei gegeben die Gleichung

$$u = f(x, y, z) = 0.$$

Sie giebt:

$$\delta u = 0 = \left(\frac{du}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{du}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{du}{dz}\right)\delta z.$$

Käme nun eine zweite und eine dritte Gleichung zwischen δx, δy, δz hinzu, so würden dadurch für die Coefficienten $\left(\frac{du}{dx}\right)$ u. s. w. Bedingungsgleichungen entstehen; oder es würde auch obiger Gleichung genügt, wenn gesetzt: $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$, $=0$.

4. Ziehen wir zwischen zwei Punkten im Raume, deren rechtwinkliche Coordinaten: (x, y, z); (x', y', z') eine Verbindungslinie: s von irgend welcher Natur, und es sei

$$s=f(x, y, z)$$

so ist jeden Falles, $\quad ds^2=dx^2+dy^2+dz^2.$

Daraus kommt durch Variiren

$$ds^2+\delta.ds^2=ds^2+\delta(dx^2+dy^2+dz^2)$$

ds aber ist ein Differenzialelement der Linie s. Soll nun s die kürzeste Linie zwischen den beiden Punkten sein, so muſs jedes Element von ihr, ds, ein Kleinstes sein. Dann aber ist, nach den Regeln der Differenzialrechnung $\delta.ds^2=0$. Also giebt die Bedingung, daſs s die kürzeste Linie sei zwischen zwei Punkten, die Gleichung:

$$o=ds.\delta ds=dx\delta dx+dy\delta dy+dz\delta dz,$$

woraus unmittelbar:

$$o=\delta.ds=\frac{dx}{ds}.\delta dx+\frac{dy}{ds}.\delta dy+\frac{dz}{ds}.\delta dz,$$

und, nach dem Satze in 2.

$$o=d.\delta s=\frac{dx}{ds}.d\delta x+\frac{dy}{ds}.d\delta y+\frac{dz}{ds}.d\delta z.$$

Nun ist: $\int v d\omega=v\omega-\int \omega dv$, nach den Regeln der Integralrechnung. Hiernach erhalten wir durch Integriren der Gleichung für $d\delta s$ zwischen den Grenzen $\delta x' \ldots$ und $\delta x'' \ldots$ welche den beiden Endpunkten der Linie s angehören mögen,

$$\begin{aligned} o=\delta s= & \frac{dx'}{ds'}\delta x'+\frac{dy'}{ds'}\delta y'+\frac{dz'}{ds'}\delta z' \\ & -\frac{dx''}{ds''}\delta x''-\frac{dy''}{ds''}\delta y''-\frac{dz''}{ds''}\delta z'' \\ & +\int\left(\delta x.d.\frac{dx}{ds}+\delta y.d.\frac{dy}{ds}+\delta z.\frac{dz}{ds}\right) \end{aligned}$$

Das Integral auf die ganze Linie s ausgedehnt, und eine willkührliche Constante darin als inbegriffen angesehen.

Offenbar sind in dieser Gleiehung die Gröſsen: $\delta x'$, $\delta y'$ $\delta z'$, Ortsveränderungen der Endpunkte. Nehmen wir diese als fest an, so werden jene $=o$, und die Gleichung zieht sich zusammen auf das in ihr enthaltene Integral unter dem Zeichen $\int$.

5. Befinde sich die Linie s auf einer Oberfläche, deren Gleichung:

$$u=o=f(x, y, z)$$

so erhalten wir aus ihr:

$$o = \delta u = \left(\frac{du}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{du}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{du}{dz}\right)dz;$$

die Bedingung aber, daſs s die kürzeste Linie sei zwischen zwei Punkten der Oberfläche, giebt, ganz allgemein aufgefaſst, nach 4.

$$o = \int\left(\delta x \, . \, d \, . \, \frac{dx}{ds} + \delta y \, . \, d \, . \frac{dy}{ds} + \delta z \frac{dz}{ds}\right)$$

Multipliciren wir nun die erste dieser beiden Gleichungen mit einem unbestimmten Coefficienten: λ, integriren wir sie so dann, so ist die Summe des Integrals mit dem der zweiten Gleichung:

$$o = \int\left[d \, . \, \frac{dx}{ds} + \lambda\left(\frac{du}{dx}\right)\right]\delta x + \int\left[d \, . \, \frac{dy}{ds} + \lambda\left(\frac{du}{dy}\right)\right]\delta y + \int\left[d \, . \, \frac{dz}{ds} + \lambda\left(\frac{du}{dz}\right)\right]\delta z.$$

In diesem Ausdrucke sind δx, δy, δz ganz unbestimmte Differenziale dem ebenfalls ganz unbestimmten δs zugehörig, welches erst durch eine bestimmt gegebene Natur des $s = f(x, y, z)$ seine nähere Bestimmung als Differenzial im eigentlichsten Sinne erhält. Die Gleichung für den Ausdruck, $= o$ kann also, ohne Hinzufügung anderer Bedingungen, nicht bestehen, auſser, wenn die Coefficienten von δx, δy, δz, $= o$ gesetzt werden, da diese an sich selbst reelle Änderungen darstellen. Hieraus folgt

$$d \, . \frac{dx}{ds} + \lambda\left(\frac{du}{dx}\right) = o;$$

$$d \, . \frac{dy}{ds} + \lambda\left(\frac{du}{dy}\right) = o;$$

$$d \, . \frac{dz}{ds} + \lambda\left(\frac{du}{dz}\right) = o.$$

und, durch Eliminirung des λ:

$$1) \left(\frac{du}{dy}\right) d \, . \frac{dx}{ds} - \left(\frac{du}{dx}\right) d \, . \frac{dy}{ds} = o;$$

$$2) \left(\frac{du}{dz}\right) d \, . \frac{dx}{ds} - \left(\frac{du}{dx}\right) d \, . \frac{dz}{ds} = o.$$

Diese Gleichungen enthalten nur Beziehung auf die Oberfläche, deren Gleichung $u = o$, und auf eine zwischen zwei Punkten derselben zu ziehende kürzeste Linie s, überhaupt: mithin die Bedingungen unter welchen sich auf einer Oberfläche von gegebener Natur eine kürzeste Linie ziehen läſst.

6. Es ist:

$$\frac{dx}{ds} = dx\,[dx^2 + dy^2 + dz^2]^{-\frac{1}{2}}$$

$$d \, . \frac{dx}{ds} = \frac{d^2x\,(dy^2 + dz^2) - dxdyd^2y - dxdzd^2z}{ds^3}$$

$$d \, . \frac{dy}{ds} = \frac{d^2y\,(dx^2 + dz^2) - dydxd^2x - dydzd^2z}{ds^3}$$

d. h. $$d.\frac{dx}{ds}=\frac{dz(dyd^2x-dxd^2y)}{ds^3}\left[\frac{dy}{dz}+\frac{dzd^2x-dxd^2z}{dyd^2x-dxd^2y}\right]$$

$$d.\frac{dy}{ds}=\frac{dz(dxd^2y-dyd^2x)}{ds^3}\left[\frac{dx}{dz}+\frac{dzd^2y-dyd^2z}{dxd^2y-dyd^2x}\right].$$

Diese letzteren beiden Ausdrücke in die obige Gleichung 5. 1 untergelegt, so kommt:

$$3)\qquad o=\frac{du}{dy}\left[\frac{dy}{dz}+\frac{dzd^2x-dxd^2z}{dyd^2x-dxd^2y}\right]$$

$$+\frac{du}{dx}\left[\frac{dx}{dz}+\frac{dzd^2y-dyd^2z}{dxd^2y-dyd^2x}\right].$$

d. h. $$o=\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dx}{dz}+\left(\frac{du}{dy}\right)\left[\frac{dzd^2x-dxd^2z}{dyd^2x-dxd^2y}\right]+\left(\frac{du}{dy}\right)\left[\frac{dzd^2y-dyd^2z}{dxd^2y-dyd^2x}\right].$$

Aus der Differenzialgleichung für die Oberfläche folgt

$$-\left(\frac{du}{dz}\right)=\left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dx}{dz}+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dz}.$$

Dies in 3, untergelegt giebt

$$4)\qquad o=\left(\frac{du}{dz}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\left[\frac{dxd^2z-dzd^2x}{dyd^2x-dxd^2y}\right]$$

$$+\left(\frac{du}{dx}\right)\left[\frac{dzd^2y-dyd^2z}{dyd^2x-dxd^2y}\right],$$

als Endgleichung der Bedingungen unter welchen eine Linie zwischen zwei Punkten auf einer gegebnen Oberfläche die Kürzeste ist.

7. Berühre die Oberfläche eine Ebene in dem Punkte (x, y, z) und schneiden wir sie zugleich durch denselben Punkt mit einer Ebene, so ist die Gleichung der letzteren

$$Ax+By+Cz-D=o,$$

A, B, C, D, Constanten.

Durch Differenziiren erhalten wir

$$Adx+Bdy+Cdz=o$$
$$Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z=o$$

wo dx, dy, dz der Kurve angehören, welche durch den Schnitt auf der Oberfläche entsteht.

Hieraus kommt:

$$A(dxd^2y-dyd^2x)+C(dzd^2y-dyd^2z)=o$$
$$B(dyd^2x-dxd^2y)+C(dzd^2x-dxd^2z)=o$$

$$\frac{A}{C}=\frac{dzd^2y-dyd^2z}{dyd^2x-dxd^2y}$$

$$\frac{B}{C}=\frac{dxd^2z-dzd^2x}{dyd^2x-dxd^2y}.$$

Dies in die Gleichung 6. 4, gesetzt, giebt:

$$5)\ A\left(\frac{du}{dx}\right)+B\left(\frac{du}{dy}\right)+C\left(\frac{du}{dz}\right)=o$$

die Gleichung einer auf der Oberfläche senkrecht stehenden Ebene; woraus folgt:

dafs je zwei unendliche nahe Punkte einer auf der Oberfläche gezogenen kürzesten Linie in eine auf dieser vertikal stehende Ebene fällt. Da nun diese ihre jedesmalige Lage im Raume, im Allgemeinen für jeden Punkt der Oberfläche ändert, so folgt hieraus ferner, dafs die kürzeste Linie auf einer Oberfläche, wenn diese in allen Theilen gekrümmt ist, eine Curve ist doppelter Krümmung.

8. Ist die Oberfläche eine Ebene, so werden $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$ Constanten. Setzen wir sie $=A'$, B', C', so verwandelt sich die Gleichung 7. 5, in

$$AA'+BB'+CC'=o.$$

Die Gleichung zweier sich unter rechtem Winkel schneidenden Ebenen, woraus folgt:

dafs der Durchschnitt zweier auf einander senkrechten Ebenen, also jede gerade Linie (die als ein solcher Durchschnitt zu betrachten ist) die Kürzeste zwischen zwei Punkten im Raume.

9. Ist die Oberfläche die einer Kugel, so können wir setzen: $u=x^2+y^2+z^2-r^2$, wenn wir den Mittelpunkt der Kugel zum Anfange der Coordinaten wählen, und r der Halbmesser ist der Kugel. Dann verwandelt sich 7. 5, in

$$o=Ax+By+Cz,$$

die Gleichung einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene, woraus ersichtlich,

dafs die kürzeste Linie auf der Kugel-Oberfläche ganz und gar in eine darauf vertikale Ebene fällt.

10. Für das Sphäroid ist allgemein

$$u=A'x^2+B'y^2+C'z^2-D'=o$$

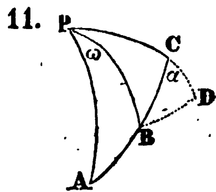
A', B', C', Constanten, und den Anfang der Coordinaten in den Mittelpunkt des Sphäroids gelegt. Dies verwandelt die Gleichung 7. 5, in

$$AA'x+BB'y+CC'z=o,$$

woraus erhellet,

dafs die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten auf der Oberfläche eines Sphäroids in eine darauf vertikale und zugleich den Mittelpunkt desselben schneidende Ebene fällt.

Wie die in Cap. 11. dargestellte Figur der Erde zeigt, giebt es für diese keine andere Ebene, welche den beiden Bedingungen zugleich genügt, als der Äquator, und jede Meridianebene, daher nur in ihnen die kürzeste Linie in eine Ebene trifft, außer ihnen aber für jede andere zwei Punkte endlicher Entfernung von einander nur eine Curve doppelter Krümmung sein kann.

11. 

Sei P der Nordpol des Erdsphäroids; AB eine zwischen A und B, Punkten auf der Oberfläche, gezogne geodätische Linie $=\Sigma$; PA, PB, Meridianbogen; φ die Breite von B; APB, der Längenunterschied zwischen A, B, $=\omega$. Wachse AB um BC $=d\Sigma$; zugleich φ um $d\varphi$, ω um $d\omega$; BD falle in den Parallelkreis von B, dessen Halbmesser $=\varrho$, den des Äquators $=1$ gesetzt; R sei der Meridian-Krümmungshalbmesser für B; er ist es auch für den unendlich nahen Punkt C. Das Dreieck BCD, dessen Winkel α das Azimuth der geodätischen Linie bei C, und welches, von unendlich kleinen Seiten eingeschlossen, geradlinigt und bei D rechtwinklich ist, giebt:

$$d\Sigma = \frac{R d\varphi}{\cos\alpha} = \frac{\varrho d\omega}{\sin\alpha}$$

auch

$$d\Sigma = \sqrt{[R^2 d\varphi^2 + \varrho^2 d\omega^2]} = d\omega \sqrt{\left[\frac{R^2 d\varphi^2}{d\omega^2} + \varrho^2\right]}$$

oder, gesetzt

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = p,$$

$$d\Sigma = d\omega \sqrt{[\varrho^2 + R^2 p^2]}.$$

Weil aber Σ die kürzeste Linie sein soll, so mufs jede Änderung der Natur ihrer Function, d. h. $\delta\Sigma$ mufs $=0$ sein. Also:

$$0 = \delta\Sigma = \delta\int d\Sigma = \delta\int d\omega \sqrt{[\varrho^2 + R^2 p^2]} = \delta\int V d\omega,$$

wenn wir, der Kürze wegen, $\sqrt{[\varrho^2 + R^2 p^2]} = V$ setzen;

und

$$0 = \delta\int V d\omega = \int \delta V d\omega = \int \overline{V d\delta\omega + d\omega\delta V}$$

in welchem Ausdruck wir das vom V unabhängige $d\omega$ als constant nehmen.

Nun ist:

$$\delta V = \left(\frac{dV}{d\omega}\right)\delta\omega + \left(\frac{dV}{d\varphi}\right)\delta\varphi + \left(\frac{dV}{dp}\right)\delta p;$$

$$d\omega\,\delta V = \left(\frac{dV}{d\omega}\right)\delta\omega\, d\omega + \left(\frac{dV}{d\varphi}\right)\delta\varphi\, d\omega + \left(\frac{dV}{dp}\right)\delta p\, d\omega;$$

auf ähnliche Weise ist

$$\delta\omega\, dV = \left(\frac{dV}{d\omega}\right)\delta\omega\, d\omega + \left(\frac{dV}{d\varphi}\right)\delta\omega\, d\varphi + \left(\frac{dV}{dp}\right)\delta\omega\, dp$$

und $\int V d\delta\omega = V\,\delta\omega - \int \delta\omega\, dV;$

Daraus kommt:

$$0 = \int \overline{V d\delta\omega + d\omega\delta V} = V\delta\omega + \int \overline{\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)(\delta\varphi d\omega - \delta\omega d\varphi) + \left(\frac{dV}{dp}\right)(\delta p d\omega - \delta\omega dp)}$$

$$= V\,\delta\omega + d\omega \int \overline{\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)(\delta\varphi - p\delta\omega) + \left(\frac{dV}{dp}\right)\frac{\delta p d\omega - \delta\omega dp}{d\omega}}.$$

Aus

$$p = \frac{d\varphi}{d\omega}$$

folgt $$\delta p = \frac{d\omega d\delta\varphi - d\varphi d\delta\omega}{d\omega^2}$$

daher $$\delta p d\omega = d\delta\varphi - p d\delta\omega$$

und $$\delta p d\omega + \delta\omega dp = d\delta\varphi - p d\delta\omega + \delta\omega dp$$
$$= d(\delta\varphi - p\delta\omega)$$

woraus:

$$o = V\delta\omega + d\omega \int \left(\frac{dV}{d\varphi}\right)(\delta\varphi - p\delta\omega) + \left(\frac{dV}{dp}\right) \cdot \frac{1}{d\omega} \cdot d(\delta\varphi - p\delta\omega).$$

Es ist aber:

$$\int \left(\frac{dV}{dp}\right) \frac{d(\delta\varphi - p\delta\omega)}{d\omega} = \left(\frac{dV}{dp}\right) \frac{\delta\varphi - p\delta\omega}{d\omega} - \int \frac{\delta\varphi - p\delta\omega}{d\omega} \cdot d\left(\frac{dV}{dp}\right).$$

Also:

$$o = V\delta\omega + \left(\frac{dV}{dp}\right)(\delta\varphi - p\delta\omega) + d\omega \int \overline{\left(\frac{dV}{d\varphi}\right) - d.\left(\frac{dV}{d\varphi} \cdot \frac{1}{\omega}\right)(\delta\varphi - p\delta\omega)}.$$

Weil die Endpunkte der kürzesten Linie, A, B, als festgedacht werden müssen, so ist $\delta\omega$, $\delta\varphi$, $= o$ und die Gleichung giebt:

$$o = \int \overline{\left(\frac{dV}{d\varphi}\right) - d.\left(\frac{dV}{dp}\right) \cdot \frac{1}{d\omega}} = o.$$

Dies differenziirt, so kommt:

$$\left(\frac{dV}{d\varphi}\right) = d.\left(\frac{dV}{dp}\right) \cdot \frac{1}{d\omega}$$

$$\left(\frac{dV}{d\varphi}\right) d\omega = d.\left(\frac{dV}{dp}\right)$$

Nun ist $$\left(\frac{dV}{d\varphi}\right) = \frac{dV}{d\varphi} - \left(\frac{dV}{d\omega}\right)\frac{1}{p} - \left(\frac{dV}{dp}\right)\frac{dp}{d\varphi}$$

$$\left(\frac{dV}{d\varphi}\right) d\omega = \frac{dV}{d\varphi} d\omega - \left(\frac{dV}{d\omega}\right)\frac{d\omega}{p} - \left(\frac{dV}{dp}\right)\frac{dp}{p}.$$

Also: $$d\left(\frac{dV}{dp}\right) = \frac{dV}{p} - \left(\frac{dV}{d\omega}\right)\frac{d\omega}{p} - \left(\frac{dV}{dp}\right)\frac{dp}{p}$$

woraus:

$$\left(\frac{dV}{d\omega}\right) d\omega = dV - p d\left(\frac{dV}{dp}\right) - \left(\frac{dV}{dp}\right) dp = d\left[V - p\frac{dV}{dp}\right].$$

$$\int \left(\frac{dV}{d\omega}\right) d\omega = V - p\left(\frac{dV}{dp}\right) + \text{const.}$$

Es ist aber, nach obigem,

$$dz = \frac{\varrho d\omega}{\sin\alpha}, \quad \text{und} \quad V = \frac{\varrho}{\sin\alpha}.$$

Aus $V = \sqrt{(\varrho^2 + R^2 p^2)}$ folgt:

$$\left(\frac{dV}{dp}\right)=\frac{R^2p}{V}$$

$$p\left(\frac{dV}{dp}\right)=\frac{R^2p^2}{V}=\frac{\varrho\cos\alpha^2}{\sin\alpha}$$

daher
$$V-p\left(\frac{dV}{dp}\right)=\varrho\sin\alpha$$

$$\int\left(\frac{dV}{d\omega}\right)d\omega=\varrho\sin\alpha+\text{const.}$$

$$\left(\frac{dV}{d\omega}\right)d\omega=d.\varrho\sin\alpha.$$

Weil aber ϱ, R, p, unabhängig ist von ω, so ist $\left(\frac{dV}{d\omega}\right)=o$;

$$o=d.\varrho\sin\alpha$$

und durch Integriren:

$$\text{const.}=\varrho\sin\alpha$$

welches die Grundgleichung ist für die kürzeste Linie.

12. Wenn wir: ϱ, α des Anfangspunktes einer geodätischen (kürzesten) Linie Σ für deren Endpunkt übergehen lassen in ϱ' α', so ist, vermöge der in 11 aufgestellten Grundgleichung,

$$\varrho\sin\alpha=\varrho'\sin\alpha'.$$

Daraus:
$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{(\varrho^2-\varrho'^2\sin\alpha'^2)}}{\varrho}.$$

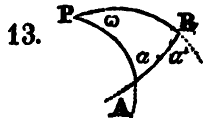
Für die Breite φ ist:

$$R=a(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\varrho=a\cos\varphi\ (1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}$$

also
$$\varrho'=a\cos\varphi'\ (1-\varepsilon^2\sin\varphi'^2)^{-\frac{1}{2}};$$

daher:
$$d\Sigma=\frac{Rd\varphi}{\cos\alpha}=\frac{a(1-\varepsilon^2)\cos\varphi d\varphi(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)^{-\frac{3}{2}}(1-\varepsilon^2\sin\varphi'^2)^{\frac{1}{2}}}{[(\cos\varphi^2-\cos\varphi'^2\sin\alpha'^2)(1-\varepsilon^2)+\varepsilon^2\cos\varphi^2\cos\varphi'^2\cos\alpha'^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

13. 

Um das $d\Sigma$ in 12 zu integriren betrachten wir das Dreieck PAB als ein sphärisches, dessen dem Winkel ω gegenüberliegende Seite $=\lambda$, die Breite von A, $=\varphi$ gesetzt, so kommt:

$$\sin\varphi=\sin\varphi'\cos\lambda-\cos\varphi'\sin\lambda\cos\alpha'$$

$$\sin\varphi=\left(\frac{tg\,\varphi'}{\cos\alpha'}\cos\lambda-\sin\lambda\right)\cos\varphi'\cos\alpha'$$

und, gesetzt:
$$\frac{tg\,\varphi'}{\cos\alpha'}=tg\,\nu';\quad \frac{\sin\varphi'}{\sin\nu'}=\sin\gamma;\quad \nu-\lambda=\nu;$$

$$1)\ \sin\varphi = \sin\gamma \sin v$$
$$2)\ \cos\varphi^2 = 1 - \sin\gamma^2 \sin v^2$$
$$\cos\varphi d\varphi = \sin\gamma \cos v dv.$$

Aus $\sin\alpha'^2 = \frac{tg v'^2 - tg\varphi'^2}{tg v'^2}$ und $\frac{\sin\varphi^2}{\sin v'^2} = \sin\gamma^2$, folgt

$$\cos\varphi'^2 \sin\alpha'^2 = \cos\gamma^2$$

daher
$$3)\ \cos\varphi^2 - \cos\varphi'^2 \sin\alpha'^2 = \sin\gamma^2 \cos v^2$$

Ferner giebt:

$$\cos\alpha' = \frac{tg\varphi'}{tg v'} \quad \text{und} \quad \frac{\sin\varphi'}{\sin v'} = \sin\gamma$$

$$4)\ \cos\varphi'^2 \cos\alpha'^2 = \sin\gamma^2 \cos v'^2.$$

Die erhaltenen Werthe: 1, 2, 3, 4 in dem Ausdruck für $d\Sigma$ gesetzt, verwandeln die Gleichung in

$$d\Sigma = \frac{a(1-\varepsilon^2)\sin\gamma\cos v dv (1-\varepsilon^2\sin\gamma^2\sin v^2)^{-\frac{3}{2}}(1-\varepsilon^2\sin\gamma^2\sin v'^2)^{\frac{1}{2}}}{[\sin\gamma^2\cos v^2(1-\varepsilon^2)+\varepsilon^2\sin\gamma^2\cos v^2(1-\sin\gamma^2\sin v^2)]^{\frac{1}{2}}},$$

welche Formel wir der Abhandlung von Erasmus Georg Foy Thune verdanken: *tentamen circa trigonometriam sphaeroidicam* 1815.

Wird nun noch bemerkt, dafs

$$1 - \sin\gamma^2 \sin v^2 = \cos v^2\left(\frac{\cos\gamma^2}{\cos v^2} + \sin\gamma^2\right)$$

so wird

$$d\Sigma = \frac{a\sqrt{(1-\varepsilon^2)}(1-\varepsilon^2\sin\gamma^2\sin v^2)^{-\frac{3}{2}}(1-\varepsilon^2\sin\gamma^2\sin v'^2)^{\frac{1}{2}}.dv}{\left[1+\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\left(\sin\gamma^2\cos v'^2+\frac{\cos\gamma^2\cos v'^2}{\cos v^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Entwickeln wir die Potenzen in diesem Ausdruck, und lassen die Glieder weg, welche eine höhere Potenz von ε, als die zweite zum Coefficienten haben, so kommt:

$$d\Sigma = a\sqrt{(1-\varepsilon^2)}\left[1-\varepsilon^2\left(\frac{\sin\gamma^2}{2}-\frac{3}{2}\sin\gamma^2\sin v^2+\frac{1}{2}\cos\gamma\frac{\cos v'^2}{\cos v^2}\right)\right]dv.$$

wovon das Integral, genommen von v bis v', d. h. von φ bis φ':

$$\Sigma = a\sqrt{(1-\varepsilon^2)}\left[v'-v-\frac{\varepsilon^2\sin\gamma^2}{2}(v'-v)+\frac{3}{4}\varepsilon^2\sin\gamma^2(v'-v-\tfrac{1}{2}\sin 2v'+\tfrac{1}{2}\sin 2v)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\varepsilon^2\cos\gamma^2\cos v'^2(tg v'-tg v)\right]$$

$$= a\sqrt{(1-\varepsilon^2)}\left[(v'-v)\left(1+\frac{\varepsilon^2 \sin\gamma^2}{2}\right)-\tfrac{3}{8}\varepsilon^2\sin\gamma^2(\sin 2v'-\sin 2v)\right.$$
$$\left.-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\cos\gamma^2\frac{\cos v'}{\cos v}\sin(v'-v)\right].$$

14. Ist das Sphäroid eine Kugel, so ist $\varepsilon^2=o$, und daher

$$\Sigma = a.(v'-v).$$

Hier ist offenbar $v'-v$ der gröſste Kreisbogen zwischen den Punkten A, B, wenn sie auf einer mit dem Äquatorhalbmesser beschriebnen Kugeloberfläche lägen. Also ist $v'-v$ für jeden gegebenen Fall sphärisch zu berechnen, nach I, 5. wenn φ, φ', ω gegeben sind.

Aus
$$\frac{\sin\varphi'}{\sin v'}=\frac{\sin\varphi}{\sin v}$$
findet sich
$$tg\tfrac{1}{2}(v'+v)=\frac{tg\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi)}{tg\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi)}\,tg\tfrac{1}{2}(v'-v)$$
mittelst welcher Gleichung sich, aus $v'-v$, v' bestimmen läſst.

Ist also φ, φ', ω gegeben, so ist auch Σ gegeben, die kürzeste Entfernung der beiden gegebenen Punkte auf dem Erdsphäroid. Dann findet sich auch α', aus

$$\cos\alpha'=\frac{tg\varphi'}{tg v'}$$ und, wie leicht einzusehen ist, α, aus

$$\cos\alpha=\frac{tg\varphi}{tg v}.$$

Ist aber φ, α und Σ gegeben, so erhalten wir

aus $\sin\alpha\cos\varphi=\cos\gamma$ und $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\varphi}=\sin v$

das v, und $v'-v$, annäherungsweise, aus

$$v'-v=\frac{\Sigma}{a\sqrt{(1-\varepsilon^2)}\left(1+\frac{\varepsilon^2\sin\gamma^2}{2}\right)\ldots\ldots};$$

also v' mithin auch φ' und α'.

Unter v' und v kann man sich die Entfernungen der Punkte B und A von irgend einem dritten denken, da denn $v'-v$ die Entfernung beider von einander ist.

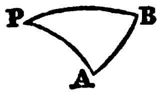
15. Nach 11. ist auch

$$d\Sigma=\frac{\varrho d\omega}{\sin\alpha}=\frac{\varrho^2 d\omega}{\varrho'\sin\alpha'}.$$

Daraus folgt:

$$d\omega=\frac{\varrho'\sin\alpha'}{\varrho^2}.d\Sigma$$

$$d\omega=\frac{(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)-\frac{1}{2}\cos\varphi'\sin\alpha':\cos\varphi}{[(\cos\varphi^2-\cos\varphi'^2\sin\alpha'^2)(1-\varepsilon^2)+\varepsilon^2\cos\varphi^2\cos\varphi'^2\cos\alpha'^2]^{\frac{1}{2}}}.d\varphi.$$



Betrachten wir nun das sphäroidische Dreieck **PAB** als ein sphärisches, dessen beide Seiten **PA**, **PB** den Winkel $\mu' - \mu = \delta$ einschliefsen, so ist

$$tg\,\varphi = \frac{\sin\varphi' \cos\delta - \sin\delta \cot\alpha'}{\cos\varphi'}$$

und aus $\sin\varphi'^2 = \sin\gamma^2 \sin\nu'^2$, und aus $\frac{\cot\alpha'}{\sin\varphi'}$ gesetzt $= \cot\mu'$

ergiebt sich $\frac{tg\,\varphi'}{\sin\mu} = tg\,\gamma$

$$tg\,\varphi = tg\,\gamma \sin(\mu' - \delta) = tg\,\gamma \sin\mu,$$

daher $$\frac{d\varphi}{\cos\varphi^2} = tg\,\gamma \,.\, \cos\mu d\mu = d\,.\,tg\,\varphi.$$

Hiemit erhalten wir:

$$d\omega = \frac{(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2 \sin\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} \,.\, \cos\gamma}{\left[\left(1 - \frac{\cos\varphi'^2 \sin\alpha^2}{\cos\varphi^2}\right)(1-\varepsilon^2) + \varepsilon^2 \cos\varphi'^2 \cos\alpha'^2\right]^{\frac{1}{2}}} \,.\, d\,.\,tg\,\varphi.$$

Es ist aber, nach 13.

$$\cos\varphi^2 \sin\alpha'^2 = \cos\gamma^2$$

und aus $tg\,\varphi = tg\,\gamma \sin\mu$ folgt

$$\frac{1}{\cos\varphi^2} = 1 + tg\,\gamma^2 \sin\mu^2$$

daher $$1 - \frac{\cos\varphi'^2 \sin\alpha'^2}{\cos\varphi^2} = 1 - \cos\gamma^2(1 + tg\,\gamma^2 \sin\mu^2)$$

$$= \sin\gamma^2 \cos\mu^2.$$

Hiedurch wird also

$$d\omega = \frac{(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2 \sin\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} \sin\gamma \cos\mu \,.\, d\mu}{\sin\gamma \cos\mu \left[1 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2 \cos\varphi^2 \cos\alpha'^2}{\sin\gamma^2 \cos\mu^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$d\omega = \frac{\sqrt{(1-\varepsilon^2)} \,.\, (1-\varepsilon^2 \sin\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}}{\left[1 + \frac{\varepsilon^2 \cos\varphi^2 \cos\alpha^2}{(1-\varepsilon^2)\sin\gamma^2 \cos\mu^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \,.\, d\mu$$

Die Potenzgröfsen, wie in 13. entwickelt, so kommt:

$$d\omega = d\mu \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\cos\varphi^2 + \frac{\cos\varphi'^2 \cos\alpha'^2}{\sin\gamma^2 \cos\mu^2}\right)\right]$$

Aus $\sin\mu = \frac{tg\,\varphi}{tg\,\gamma}$ und $\cos\varphi^2 = 1 - \sin\gamma^2 \sin\nu^2$, kommt:

$$\cos\mu = \frac{\cos\nu}{\cos\varphi};$$

aus $\sin\mu = \frac{tg\varphi}{tg v}$, folgt

$$\cos\varphi^2 d\mu = \frac{d\varphi}{tg\gamma\cos\mu} = \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{tg\gamma\cos v};$$

Aus $\sin\varphi = \sin\gamma\sin v$ folgt:

$$d\varphi = \frac{\sin\gamma\cos v}{\cos\varphi} dv$$

daher $\cos\varphi^2 d\mu = \cos\gamma dv$

Hiedurch wird also:

$$d\omega = \left[d\mu - \frac{\varepsilon^2}{2}\cos\gamma \,.\, dv - \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\cos\varphi'^2\cos\alpha'^2}{\sin\gamma^2} d\,.\,tg\mu \right]$$

Das Integral:

$$\omega = \left[\mu - \frac{\varepsilon^2}{2}\cos\gamma \,.\, v - \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\cos\varphi'^2\cos\alpha'^2}{\sin\gamma^2} tg\mu \right]$$

von μ bis μ', giebt

$$\omega = \mu' - \mu - \frac{\varepsilon^2}{2}\cos\gamma\,(v' - v) - \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\cos\varphi'^2\cos\alpha'^2}{\sin\gamma^2\cos\mu'}\frac{\sin(\mu' - \mu)}{\cos\mu}.$$

Aus $\cos\mu = \frac{\cos v}{\cos\varphi}$, und $\sin\varphi = \sin\gamma\sin v$,

folgt: $\cos\mu = \frac{tg\varphi}{\sin\gamma\, tg v}$; mithin auch

$$\cos\mu' = \frac{tg\varphi'}{\sin\gamma\, tg v'} = \frac{\cos\alpha'}{\sin\gamma}$$

daher: $\frac{\cos\varphi'^2\cos\alpha'^2}{\sin\gamma^2\cos\mu'} = \cos\mu'\cos\varphi'^2.$

Wir erhalten dadurch endlich

$$\omega = \mu' - \mu - \frac{\varepsilon^2}{2}\cos\gamma\,(v' - v) - \frac{\varepsilon^2}{2}\cos\mu'\cos\varphi'^2 \,.\, \frac{\sin(\mu' - \mu)}{\cos\mu}.$$

16. Das in 14. gesagte gilt auch für den Ausdruck von ω. Wir können $\mu' - \mu$ sphärisch berechnen, als angenäherten Längenunterschied; μ erhalten wir durch den Ausdruck $\frac{tg\varphi}{\sin\gamma\, tg v}$ oder $\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$, womit dann das dritte Glied des Ausdrucks für ω berechnet werden kann. Umgekehrt läſst sich aus $\mu' - \mu$ und $v' - v$ annäherungsweise ω finden.

Sphäroidische Berechnung des Dreiecknetzes: Nordpol, Königsberg, Berlin.

1. Wir berechnen zuerst sphärisch: $v' - v$. Dies hat sich in I. 6 ergeben

$$v' - v = 4^0\, 45'\, 10''\, 89.$$

2. Die Formel $tg\frac{1}{2}(\nu'+\nu)=\frac{tg\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi)}{tg\frac{1}{2}\varphi-\varphi}.tg\frac{1}{2}(\nu'-\nu)$

giebt dann: ν' und ν.

Nach den Daten am angeführten Orte ist

$$\begin{aligned}
log.tg\tfrac{1}{2}(\nu'-\nu) &= 8{,}6180663\\
log.tg\tfrac{1}{2}(\varphi'+\varphi) &= \underline{0{,}1326549}\\
&\ 8{,}7507212\\
log.tg\tfrac{1}{2}(\varphi'-\varphi) &= \underline{8{,}2818950}\\
log.tg\tfrac{1}{2}(\nu'+\nu) &= 0{,}4688262\\
\tfrac{1}{2}(\nu'+\nu) &= 71^{0}\ 14'\ 3''\ 22\\
\tfrac{1}{2}(\nu'-\nu) &= \underline{\ \ 2\ \ 22\ \ 35\ \ 44}\\
\nu' &= 73\ \ 36\ \ 38\ \ 66\\
\nu &= 68\ \ 51\ \ 27\ \ 78.
\end{aligned}$$

3. Die Formeln: $cos\,\alpha'=\frac{tg\,\varphi'}{tg\,\nu'}$; $cos\,\alpha=\frac{tg\,\varphi}{tg\,\nu}$

geben α' und α, die Azimuthe der kürzesten Linie bei Königsberg und bei Berlin

$log.tg\,\varphi'=0{,}1501659$; $log.tg\,\varphi=0{,}1153509$

$log\,tg\,\nu'=\underline{0{,}5314622}$; $log.\,tg\,\nu=\underline{0{,}4126079}$

$log.cos\,\alpha'=4{,}6187037$

$\alpha'=65^{0}\ 26'\ 28''\ 27$; $log.cos\,\alpha=9{,}7027430$

$\alpha=59^{0}\ 42'\ 39''\ 33.$

Die sphärische Rechnung gab

$\alpha'=65\ \ 26\ \ 33,\ 77$; $\alpha=59\ \ 42\ \ 39,\ 42$

Unterschiede $=5'\ 50$; $0''\ 19.$

4. Die Formel:

$$\Sigma=a\sqrt{(1-\varepsilon^2)}\left[(\nu'-\nu)\left(1+\frac{\varepsilon^2 sin\,\gamma^2}{2}\right)-\tfrac{3}{4}\varepsilon^2 sin\,\gamma^2 sin(\nu'-\nu).cos(\nu'+\nu)\right.$$
$$\left.-\tfrac{1}{8}\varepsilon^2 cos\,\gamma^2\frac{cos\,\nu'}{cos\,\nu}sin(\nu'-\nu)\right]$$

giebt die kürzeste Linie auf dem Erdsphäroid zwischen Königsberg und Berlin

1. Wir berechnen zuerst γ aus: $\frac{sin\,\varphi}{sin\,\nu}=sin\,\gamma$.

$$\begin{aligned}
log.\,sin\,\varphi &= 9{,}8995\\
log.\,sin\,\nu &= \underline{9{,}9697}\\
log.\,sin\,\gamma &= 9{,}9298;\quad log.cos\,\gamma=9{,}7205.
\end{aligned}$$

2. Das Glied: $(\nu'-\nu)\left(1+\frac{\varepsilon^2 sin\,\gamma^2}{2}\right)=\nu'-\nu+\frac{(\nu'-\nu)\varepsilon^2 sin\,\gamma^2}{2}$

$\nu'-\nu=17110{,}88$ Secunden

$$\begin{aligned}
log.(v'-v) &= 4{,}2333 \\
log.\,\varepsilon^2 &= 7{,}8089 \\
log.\,sin\,\gamma^2 &= 9{,}8596 \\
&\overline{\;1{,}9018\;} \text{ in Secunden}
\end{aligned}$$

$$num. = 79''76$$

$$\frac{(v'-v)\,\varepsilon^2 \sin\gamma^2}{2} = 39''\,88$$

$$v'-v = 17110''\,88$$

$$17150''\,76 = (v'-v)\left(1+\frac{\varepsilon^2 \sin\gamma^2}{2}\right).$$

3. **Das Glied** $\frac{3}{4}\varepsilon^2 \sin\gamma^2 \sin(v'-v)\cos(v'+v)$

$$\begin{aligned}
log.\,sin\,\gamma^2 &= 9{,}8596 \\
log.\,\varepsilon^2 &= 7{,}8089 \\
log.\,sin(v'-v) &= 8{,}9181 \\
log.\,cos(v'+v) &= 9{,}8992^n \\
&\overline{\;6{,}4858^n} \\
log.\,arc\,1'' &= 4{,}6856 \\
&\overline{\;1{,}8002^n}
\end{aligned}$$

$$num. = -\,63''\,13$$

$$\frac{3}{4}\varepsilon^2 \sin\gamma^2 \sin(v'-v)\cos(v'+v) = -47''\,34.$$

4. **Das Glied:** $\frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos\gamma^2 \frac{\cos v'}{\cos v}\sin(v'-v)$

$$\begin{aligned}
log.\,cos\,\gamma^2 &= 9{,}4410 \\
log.\,\varepsilon^2 &= 7{,}8089 \\
log.\,sin(v'-v) &= 8{,}9181 \\
log.\,cos\,v' &= 9{,}4508 \\
&\overline{\;5{,}6188\;} \\
log.\,cos\,v &= 9{,}5573 \\
&\overline{\;6{,}0615\;} \\
log.\,arc\,1'' &= 4{,}6856 \\
&\overline{\;1{,}3759\;}
\end{aligned}$$

$$num. = 23''\,76$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos\gamma^2 \frac{\cos v'}{\cos v}\sin(v'-v) = 11''\,88.$$

5. **Summiren wir zusammen:**

$$(v'-v)\left(1+\frac{\varepsilon^2 \sin\gamma^2}{2}\right)=17150''\,76$$

$$-\tfrac{3}{4}\varepsilon^2 \sin\gamma^2 \sin(v'-v)\cos(v'+v)= \quad 47''\,34$$

$$\overline{17198''\,10}$$

$$-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos\gamma^2 \frac{\cos v'}{\cos v}\sin(v'-v)=- \quad 23''\,76$$

$$\overline{17174''\,34}$$

so kommt

$$\Sigma = a(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\,.\,arc\,1''\,.\,17174''\,34.$$

Wir können es setzen:

$$= a\,.\,arc\,1''\,.\,17174''\,34 - \tfrac{1}{2} a\varepsilon^2\, arc\,1''\;17174''\,34$$

$$\begin{array}{ll} log.\,17174''\,34 = 4{,}2348801 & \\ log.\,arc\,1'' \quad = 4{,}6855749-10 & \\ log.\,a \quad = 6{,}2287039 & \\ \quad\quad \overline{5{,}1491589} \;\ldots\ldots\; & 5{,}14916 \\ & log.\;\varepsilon^2 = 7{,}80896 \\ num. = 140980{,}456 & \quad \overline{2{,}95812} \\ correct. = \quad 454{,}04 & correct. = \dfrac{908{,}08}{2} = 454{,}04 \\ \overline{\Sigma = 140526{,}41} \text{ in Pr. R.} & \end{array}$$

17. Puissant in seinem *traité de topographie pag.* 320 *fgg.* berechnet aus der Entfernung des Thurms von Strasburg und der höchsten Spitze des Berges, genannt Balon des Vosges, und aus dem beobachteten Azimuth dieser Distanzlinie bei Strasburg, und der gegebenen Breite von Strasburg, die Breite des Balon, das Azimuth daselbst, und den Längenunterschied beider Punkte, nach sehr verwickelten Formeln. Es wird nützlich sein, nach seinen Daten, dieselben Stücke, und zwar nach der hier dargelegten Methode zu berechnen.

Puissant giebt

$log.\,a = 6{,}8045285$, in Mètres

$log.\,\varepsilon^2 = 7{,}7779333$

$\Sigma = 89871^m\,9$

$log.\,\Sigma = 4{,}9536239$

$\alpha' = 32^\circ\;51'\;1''\,8$, Azimuth des Σ bei Strasburg

$\varphi' = 48^\circ\;34'\;57''\,5$, Breite der Thurmspitze daselbst.

$log.\sqrt{(1-\varepsilon^2)} = 9{,}9987016.$

1. Annäherung.

$$v = v' - \frac{\Sigma}{a\sqrt{(1-\varepsilon^2)}(1+\frac{1}{4}\varepsilon^2\sin\gamma^2)},\ \text{nach 14.}$$

1. Aus: $\sin\alpha' \cos\varphi' = \cos\gamma$, wird γ berechnet

aus $\frac{\sin\varphi'}{\sin\gamma} = \sin v'$, kommt v'.

$$\begin{aligned}
\log.\sin\alpha' &= 9{,}7343561 \\
\log.\cos\varphi' &= 9{,}8205555 \\
\log.\cos\gamma &= 9{,}5549116 \\
\gamma &= 68^0\ 58'\ 13''\ 7 \\
\log.\sin\gamma &= 9{,}9700657 \\
\log.\sin\varphi' &= 9{,}8750094 \\
\log.\sin v' &= 9{,}9049437 \\
v' &= 53^0\ 27'\ 29''\ 2.
\end{aligned}$$

2. Zu berechnen: $(1+\frac{1}{4}\varepsilon^2 \sin\gamma^2)$ und $a\sqrt{(1-\varepsilon^2)}$

$$\begin{aligned}
\log.\varepsilon^2 &= 7{,}77793 \\
\log.\sin\gamma^2 &= 9{,}94012 \\
&\ 7{,}71805 \\
\varepsilon^2 \sin\gamma^2 &= 0{,}0052246 \\
1+\tfrac{1}{4}\varepsilon^2\sin\gamma^2 &= 1{,}0013061
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log.a &= 6{,}8045285 \\
\log.\sqrt{(1-\varepsilon^2)} &= 9{,}9987016 \\
\log.(1+\tfrac{1}{4}\varepsilon^2\sin\gamma^2) &= 0{,}0005642 \\
&\ 6{,}8037943 \\
\log.\Sigma &= 4{,}9536239
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.\frac{\Sigma}{a\sqrt{(1-\varepsilon^2)}(1+\frac{1}{4}\varepsilon^2\sin\gamma^2)} &= 8{,}1498296 \\
\log.arc\ 1'' &= 4{,}6855749 \\
&\ 3{,}4642547 \text{ in Secunden} \\
num. &= 2912''\ 4 = 48'\ 32''\ 4.
\end{aligned}$$

3. Hieraus $v = v' - \frac{\Sigma}{a\sqrt{(1-\varepsilon^2)}(1+\frac{1}{4}\varepsilon^2\sin\gamma^2)}$

$$\begin{aligned}
v' &= 53^0\ 27'\ 29''\ 2 \\
\frac{\Sigma}{a\sqrt{(1-\varepsilon^2)}(1+\frac{1}{4}\varepsilon^2\sin\gamma^2)} &= 48'\ 32,\ 4 \\
v &= 52\ \ 38\ \ 56,\ 8.
\end{aligned}$$

2. Annäherung.

$$v = v' - \frac{\Sigma}{a\sqrt{(1-\varepsilon^2)}\left[(1+\frac{1}{4}\varepsilon^2\sin\gamma^2) - \frac{3}{4}\varepsilon^2\sin\gamma^2\sin(v'-v)\cos(v'+v) - \frac{1}{2}\varepsilon^2\cos\gamma^2\frac{\cos v'}{\cos v}\sin(v'-v)\right]}$$

1. Zu berechnen $v'+v$ und $v'-v$;

$$\begin{aligned}
v' &= 53^0\ 27'\ 29''\ 2 \\
v &= 52\ \ 38\ \ 56,\ 8 \\
v'+v &= 106\ \ 6\ \ 26''\ 0 \\
v'-v &= 0\ \ 48\ \ 32''\ 4.
\end{aligned}$$

2. Das zweite Glied des Nenners: $\frac{3}{4}\varepsilon^2\sin\gamma^2\sin(v'-v)\cos(v'+v)$

$$log.\ \varepsilon^2 = 7{,}77798$$
$$log.\ sin\,\gamma^2 = 9{,}94012$$
$$log.\ cos\,(v' + v) = 9{,}44341^n$$
$$log.\ sin\,(v' - v) = 8{,}14945$$
$$5{,}31096^n$$
$$log.\ arc\,1'' = 4{,}68557$$
$$-0{,}62539 \text{ in Sec.}$$
$$num. = 4''\,2$$

$$\tfrac{3}{4}\varepsilon^2\,sin\,\gamma^2\,sin\,(v' - v)\,cos\,(v' + v) = -3''\,15.$$

3. Zu berechnen: $\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\,cos\,\gamma^2\,\dfrac{cos\,v'}{cos\,v}\,sin\,(v' - v)$

$$log.\ \varepsilon^2 = 7{,}77798$$
$$log.\ cos\,\gamma^2 = 9{,}10982$$
$$log.\ cos\,v' = 9{,}78312$$
$$log.\ sin\,(v' - v) = 8{,}14945$$
$$4{,}82037$$
$$log.\ cos\,v = 9{,}77489$$
$$5{,}04548$$
$$log.\ arc.\,1'' = 4{,}68557$$
$$0{,}35991$$
$$num. = 2''\,29.$$

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\,cos\,\gamma^2\,\frac{cos\,v'}{cos\,v}\,sin\,(v' - v) = 1''\,14.$$

4. Wir summiren nun

$$-\tfrac{3}{4}\varepsilon^2\,sin\,\gamma^2\,sin\,(v' - v)\,cos\,(v' + v) = +3''\,15$$
$$-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\,cos\,\gamma^2\,\frac{cos\,v'}{cos\,v}\,sin\,(v' - v) = \frac{-1,\,14}{2''\,01}$$

woraus sich ergiebt, dafs der Werth der ersten Annäherung keine Änderung mehr leidet.

5. Nun ist

$$log.\ sin\,v = 9{,}9003332$$
$$log.\ sin\,\gamma = 9{,}9700657$$
$$log.\ sin\,\varphi = 9{,}8703989$$
$$\varphi = 47^\circ\,54'\,4''\,8$$

Puissant findet $\varphi = 47\ \ 54\ \ 5\ \ 7$

Unterschied . . . . . $0''\,9.$

Ferner ist $cos\,\alpha = \dfrac{tg\,\varphi}{tg\,v}$

$$log.\,tg\,\varphi = 0{,}0440588$$
$$log.\,tg\,v = 0{,}1173717$$
$$log.\,cos\,\alpha = 9{,}9266871$$
$$\alpha = 212^\circ\ 21'\ 48''\ 0$$

Puissant hat $\alpha = 212\ 21\ 49\ \ 7$

Unterschied . . . . $1''\,7.$

Den Längenunterschied ω berechnen wir nach den Formeln:

$$sin\,\mu = \frac{tg\,\varphi}{tg\,\gamma};\quad sin\,\mu' = \frac{tg\,\varphi'}{tg\,\gamma},\ \text{und}$$

$$\omega = \mu' - \mu - \frac{\varepsilon^2}{2}\,cos\,\gamma\,(v' - v) - \frac{\varepsilon^2}{2}\,\frac{cos\,\varphi'^2\,cos\,\alpha'^2\,sin\,(\mu' - \mu)}{sin\,\gamma^2\,cos\,\mu'\,cos\,\mu}.$$

1. $log.\,tg\,\varphi = 0{,}0440588$
$log.\,tg\,\varphi' = 0{,}0544539$
$log.\,tg\,\gamma = 0{,}4151541$
$log.\,sin\,\mu' = 9{,}6392998$
$log.\,sin\,\mu = 9{,}6289047$
$\mu' = 25^\circ\ 50'\ 13''\ 0$
$\mu = 25^\circ\ 10'\ 57''\ 4$
$\mu' - \mu = \quad 39'\ 15''\,6$

2. $log.\,\varepsilon^2 = 7{,}77798$
$log.\,cos\,\gamma = 9{,}55491$
$log.\,(v' - v) = 3{,}46425$ in Sec.
$0{,}79714$
$num. = \ 6''\,268$
$\frac{\varepsilon^2}{2}\,cos\,\gamma(v' - v) = \ 3''\,134$

3. $log.\,\varepsilon^2 = 7{,}77798$
$log.\,cos\,\varphi'^2 = 9{,}65270$
$log.\,cos\,\alpha'^2 = 9{,}85350$
$log.\,sin\,(\mu' - \mu) = 8{,}05812$
$5{,}34230$
$log.\,sin\,\gamma^2 = 9{,}94012$
$log.\,cos\,\mu' = 9{,}95427$
$log.\,cos\,\mu = 9{,}95668$
$9{,}85107$
$5{,}49123$
$4{,}68557$
$0{,}80466$ in Sec.
$num. = 6''\,38$
$\frac{\varepsilon^2}{2}\,\frac{cos\,\varphi'^2\,cos\,\alpha'^2\,sin\,(\mu' - \mu)}{sin\,\gamma^2\,cos\,\mu'\,cos\,\mu} = 3''\,19$

1. 2. 3. Summirt:
$\mu' - \mu = 39'\ 15''\,6$
$-\frac{\varepsilon^2}{2}\,cos\,\gamma\,(v' - v) = \quad -3{,}13$
$-\frac{\varepsilon^2\,cos\,\varphi'^2 \ldots}{2\ \ldots\ldots} = \quad -3{,}19$
$-6{,}32$
$\omega = 39'\ \ 9''\,5$

Puissant bekommt
$\omega = 39'\ \ 8''\,8$
Unterschied $= \quad 0''\,7.$

18. Eben diese directe sphäroidisch geodätische Methode läſst sich auch, ohne Schwierigkeit zur Berechnung der Dreiecke eines geodätischen Netzes gebrauchen.

Legen wir das Dreieck unsrer Instruction Cap. III. 3. zum Grunde, mit den dortigen Daten:

$$log.\,\Sigma = 4{,}7827518$$
$$log.\,a = 6{,}2287039$$
$$log.\,\varepsilon^2 = 7{,}8089667$$
$$\alpha = 44^0\ 18'\ 2''\ 10$$
$$\varphi = 49^0\ 29'\ 12''\ 90$$

so finden wir, durch zweimalige Annäherung

$$\varphi' = 50^0\ 56'\ 5''\ 21.$$

Oben erhielten wir $\varphi' = 50^0\ 56'\ 5''\ 38$

diff. . . . . . $0''\ 17$

ferner aus $cos\,\alpha' = \frac{tg\,\varphi'}{tg\,v'}$

$$\alpha' = 46^0\ 2'\ 59''\ 8$$

die sphärische Rechnung gab . . . $46^0\ 2'\ 41''\ 63$

diff. . . . $8''\ 17.$

Dieser Unterschied rührt von der verschiedenen Krümmung her der Bogen bei ihrem Durchschnitt mit dem Meridian, je nachdem er für einen gröfsten Kreisbogen, oder für die kürzeste Linie, doppelter Krümmung, angenommen wird.

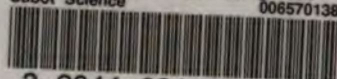
Endlich gab die sphäroidische Rechnung:

$$\omega = 2^0\ 16'\ 10''\ 92$$

die sphärische oben $= 2^0\ 16'\ 11''\ 25$

diff. . . . . $0''\ 33.$

Gedruckt bei Trowitzsch und Sohn in Berlin.


Eng 498.31
Anleitung zu rechnungen der geodas
Cabot Science
006570138
3 2044 091 981 589